Résolution d'équation différentielles du $1^{er} ordre$

Alexandre FAURE

September 12, 2007

Une équation différentielle du premier ordre se présente sous la forme suivante :

$$a(t).\dot{x(t)} + b(t).x(t) = f(t) \tag{1}$$

En premier lieu, il est nécessaire de normaliser l'équation de façon à obtenir une équation de la forme :

$$\dot{x(t)} + \frac{b(t)}{a(t)}.x(t) = \frac{f(t)}{a(t)} \tag{2}$$

La solution générale de cette équation que l'on notera ici x_G est une combinaison linéaire de la solution de l'équation homogène x_H et de la solution particulière x_P de la façon suivante : $x_G = x_H + x_P$.

Dès lors, employons-nous à résoudre l'équation homogène (3) (avec $C \in IR$ et $K = \exp C$):

$$\dot{x_H(t)} + \frac{b(t)}{a(t)}.x_H(t) = 0 \tag{3}$$

$$\int \frac{\dot{x_H(t)}}{x_H(t)}.dt = -\int \frac{b(t)}{a(t)}.dt \tag{4}$$

$$\ln x_H(t) = -\int \frac{b(t)}{a(t)}.dt + C \tag{5}$$

$$x_H(t) = K.\exp\left(-\int \frac{b(t)}{a(t)}.dt\right) \tag{6}$$

Puis nous cherchons une solution particulière de l'équation générale ((2)) en prenant, par exemple, $x_P(t)$ constante d'où :

$$\frac{b(t)}{a(t)}.x_P(t) = \frac{f(t)}{a(t)} \tag{7}$$

$$x_P(t) = \frac{f(t)}{b(t)} \tag{8}$$

Donc la solution générale $x_G(t)$ de cette équation différentielle du premier ordre est :

$$x_G(t) = x_H(t) + x_P(t) = K.\exp\left(-\int \frac{b(t)}{a(t)}.dt\right) + \frac{f(t)}{b(t)} \tag{9}$$

`http://alexandre.etudes.free.fr`