Utilisations du théorème d'Ampère

Alexandre FAURE

9 Juillet 2007

Ce document est déstiné à quiconque souhaite comprendre le fonctionnement du théorème d'Ampère en électromagnètisme. Rappelons que ce théorème est utilisé pour calculer le champ magnétique $\vec{B}$ crée par une distribution de courant sur une surface à contour fermé.

Théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{B}.dl = \mu_0.\iint \vec{j}.\vec{n}.ds \tag{1}$$

avec :
$\vec{B}$: vecteur champ magnétique
dl : élément de longueur
μ_0 : permébilité du vide
$\vec{j}$: vecteur distribution volumique du courant
$\vec{n}$: vecteur normal à la surface considérée
ds : élément de surface

1 Distribution surfacique de charges

Nous allons chercher à calculer le champ magnétique créée par un conducteur cylindrique infini d'axe $z'Oz$, de rayon R parcouru par un courant d'intensité I et de densité uniforme $j = \frac{I}{\pi.R^2}$ parallèle à $z'Oz$.

1.1 Invariances et symétries

En considérant la symétrie du cylindre, nous pouvons en déduire les principales invariances (il est superflu de rappeler que le systéme de coordonées choisi est le système de coordonées cylindriques). Il existe une invariance de translation suivant l'axe $\vec{e_z}$ et de rotation autour de ce même axe de variable ϕ.

En ce qui concerne les plans de symétries, notifions que la situation différe des calculs de champs électrostatiques $\vec{E}$. En effet, le champ magnétique $\vec{B}$ est contenu dans un plan d'antisymétrie (et non de symétrie). Ainsi, le champ magnétique $\vec{B}$ sera normal à la surface du plan de symétrie. Les plans de symétries du cylindre sont tous les plans qui contiennent l'axe $\vec{e_z}$ et un plan d'antisymétrie sera le plan $\vec{e_r}.\vec{e_\phi}$.

On en déduis donc l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B} = B(r).\vec{e_\phi} \tag{2}$$

2 Calcul du champ magnétique

Occupons nous du terme à gauche de l'équation en premier lieu. La distribution du courant est cylindrique. Par conséquent, nous choisirons comme éléments de longueur pour le calcul, le cercle C à la base du cylindre.

Dès lors, nous pouvons calculer :

$$\oint \vec{B}.dl = B(r).r.\int \phi = B(r).2.\pi.r \tag{3}$$

Désormais, nous pouvons calculer le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur ($r < R$) et à l'extérieur de cylindre ($r > R$) :

- $r < R$: d'après l'énoncé, la distribution voumique du courant est : $j = \frac{I}{\pi.R^2}$. Dès lors, en appliquant le théorème d'Ampère, on obtient :

$$\oint \vec{B}.dl = \mu_0.\iint \frac{I}{\pi.R^2}.\vec{e_z}.\vec{e_z}.r.dr.d\phi \tag{4}$$

$$B(r).2.\pi.r = \mu_0.\frac{I}{\pi.r^2}.\int r.dr.\int d\phi \tag{5}$$

$$B(r).2.\pi.r = \mu_0.\frac{I}{\pi.R^2}.\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^r.2.\pi \tag{6}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0.I.r}{2.\pi.R^2} \tag{7}$$

- $r > R$: on considérera donc toute la surface. Lors de l'intégration, on veuillera bien à effectuer le calcul de 0 à r puis de r à R (en effet, au déla de la longueur R, la distribution $\vec{j}$ est nulle. Dès lors, en appliquant le théorème d'Ampère, on obtient :

$$\oint \vec{B}.dl = \mu_0.\iint \frac{I}{\pi.R^2}.\vec{e_z}.\vec{e_z}.r.dr.d\phi \tag{8}$$

$$B(r).2.\pi.r = \mu_0.\frac{I}{\pi.R^2}.\int r.dr.\int d\phi \tag{9}$$

$$B(r).2.\pi.r = \mu_0.\frac{I}{\pi.R^2}.\left[\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^r + \left[\frac{r^2}{2}\right]_r^R\right]2.\pi \tag{10}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0.I}{2.\pi.r} \tag{11}$$

Donc nous pouvons écrire que le champ magnétique créée à l'intérieur du cylindre ($r < R$) est $\vec{B(r)} = \frac{\mu_0.I.r}{2.\pi.R^2}.\vec{e_\phi}$ et le champ magnétique créée à l'extérieur du cylindre ($r > R$) est $\vec{B(r)} = \frac{\mu_0.I}{2.\pi.r}.\vec{e_\phi}$.