Utilisations de la loi de Biot et Savart

Alexandre FAURE

13 Juillet 2007

Ce document est déstiné à quiconque souhaite comprendre le fonctionnement de la loi de Biot et Savart en électromagnètisme. Rappelons que ce théorème est utilisé pour calculer le champ magnétique $\vec{B}$ crée par une distribution de courant continu. Nous pouvons considérer qu'elle est la loi générale du calcul du champ magnétique étant donné qu'en intégrant son expression sur un circuit fermé, on peut retrouver le théorème d'Ampère (qui fait l'objet d'un précédent article).

Loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4.\pi}.I.\vec{dl} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} \tag{1}$$

avec :
$\vec{B}$: vecteur champ magnétique
μ_0 : permébilité du vide
I : courant
dl : élément de longueur
$\vec{PM}$: vecteur reliant la distribution de courant au point d'application

1 Champ créée par deux demi-spires circulaires

Nous allons chercher à calculer le champ magnétique sur l'axe à la distance Z du centre, créée par deux demi-spires de même rayon R, de centre O, d'axe $z'Oz$, parcourues par des courants de même intensité et de même sens.

Ici, nous ne nous attarderons pas sur la considération des invariances et symétries (voir les articles consacrés aux théorèmes de Gauss et Ampère qui détaillent ces analyses). En observant la configuration spatiale des deux demi-spires et de l'orientation des axes, on s'aperçoit que le plan xOz est plan d'antisymétrie et contient donc le champ magnétique $\vec{B}$ qui sera donc orienté selon l'axe $vece_x$. Les calculs qui vont suivre vont nous éclairer sur la façon dont nous allons traiter le présent problème.

1.1 Calcul du champ magnétique

En premier lieu, nous nous occuperons de l'élément "‘clé"’ de l'expression de la loi c'est à dire du produit vectoriel dans le systéme de coordonées cylindriques.

$$\vec{dl} \wedge \vec{PM} = \begin{vmatrix} 0 \\ R.d\phi \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R \\ 0 \\ Z \end{vmatrix} = R.Z.d\phi.\vec{e_\rho} + R^2.d\phi.\vec{e_z}$$

Comme la composante suivant l'axe $\vec{e_z}$ est nulle, nous utiliserons donc la coordonée suivant l'axe $\vec{e_\rho}$ qui sera décomposé en coordonées suivant les axes $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$.

$$\text{R.Z.d}\phi.\vec{e_\rho} = R.Z.d\phi.cos\phi.\vec{e_x} + R.Z.d\phi.sin\phi.\vec{e_y}$$

Nous pouvons donc désormais passer au calcul du champ en utilisant la loi de Biot et Savart :

$$dB_x = \frac{\mu_0.I}{4.\pi}.\frac{R.Z.d\phi}{(R^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}.cos\phi \tag{2}$$

$$B_x = \frac{\mu_0.I}{4.\pi}.\frac{R.Z}{(R^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}.\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\phi.cos\phi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\phi.cos\phi\right) \tag{3}$$

$$B_x = \frac{\mu_0.I}{4.\pi}.\frac{R.Z}{(R^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}.\left(\left[sin\phi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} + \left[sin\phi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\right) \tag{4}$$

$$B_x = -\frac{\mu_0.I}{\pi}.\frac{R.Z}{(R^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5}$$

Le champ magnétique sur l'axe à la distance Z du centre, créée par deux demi-spires de même rayon R, de centre O, d'axe $z'Oz$, parcourues par des courants de même intensité et de même sens est donc :

$$\vec{B}_x = \frac{\mu_0.I}{\pi}.\frac{R.Z}{(R^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}.\vec{e}_x \tag{6}$$