Approche thermodynamique de l'effet de serre

Alexandre Fauré

26 juin 2008

On étudiera dans cet article, l'approche thermodynamique de l'élévation de température d'un corps considéré comme noir au dessus duquel on superpose n vitres. Cette démonstration est issue d'un Travaux Dirigé de Thermodynamique de niveau L2. Il sera utilisé dans l'exercice deux lois fondamentales :

- Lois de Wien : $\lambda.T = 2898.10^{-6} m.K$
- Loi de Stefan-Boltzmann : $\phi = \sigma.T^4$

Remarque : il est très vivement conseillé de réaliser un schéma de la situation pour chaque partie afin de bien comprendre les échanges intervenant dans le bilan radiatif.

1 Application pour une vitre

Dans cette première partie, nous considérons l'ensemble corps noir (que l'on notera ultérieurement CN) et vitre 1 (notée V1). Notons que le corps noir est en réalité, une plaque noircie et qui reçoit un rayonnement solaire ϕ_S connu, supposé évidemment arriver à la plaque. De plus, la constante de Stefan est évidemment connu dans l'exercice mais elle ne sera pas mentionné ainsi que toutes les autres potentielles valeurs numériques puisque seul la démonstration nous intéresse dans cet exercice.
Effectuons un bilan radiatif au niveau des deux éléments :
CN :

$$\phi_S + \phi_{V_1} - \phi_{CN} = 0 \tag{1}$$

V1 :

$$\phi_{CN} - 2\phi_{V_1} = 0 \tag{2}$$

De l'équation (1), on écrit :

$$\phi_{CN} = \phi_S + \phi_{V1} \tag{3}$$

ainsi que de l'équation (2), nous tirons :

$$\phi_{CN} = 2\phi_{V1} \tag{4}$$

Soit :

$$\phi_{V1} = \phi_S \tag{5}$$

Il suffit de réinjecter ce résultat dans l'équation (2) par exemple pour obtenir :

$$\phi_{CN} = 2\phi_S = \sigma.T^4 \tag{6}$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{T = \left(\frac{2\phi_S}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}} \tag{7}$$

Remarque : le cas à deux vitres pourra être traité à titre d'exercice par le lecteur désireux d'approfondir cette notion.

2 Application pour trois vitres

Même exerice que pour la première partie mais cette fois-ci, avec trois vitres au-dessus du corps noir. J'insiste sur le fait qu'un schéma est plus que nécessaire ici pour se représenter convenablement la situation. C'est dans cette partie que nous élargirons le raisonnement à n vitres voulu initialement.

Effectuons un bilan radiatif pour chaque élément :

CN :

$$\phi_S + \phi_{V1} - \phi_{CN} = 0 \tag{8}$$

V1 :

$$\phi_{V2} + \phi_{CN} - 2\phi_{V1} = 0 \tag{9}$$

V2 :

$$\phi_{V3} + \phi_{V1} - 2\phi_{V2} = 0 \tag{10}$$

V3 :

$$\phi_{V2} - 2\phi_{V3} = 0 \tag{11}$$

Or, d'après l'équation (9) :

$$2\phi_{V1} = \phi_{CN} + \phi_{V2} \tag{12}$$

soit encore :

$$\phi_{V1} - \phi_{V2} = \phi_{CN} - \phi_{V1} = \phi_S \tag{13}$$

et d'après l'équation (3) du cas à une vitre, on en déduit aisément :

$$\phi_S = \phi_{V1} - \phi_{V2} \tag{14}$$

Encore une fois, essayons de calculer ϕ_S pour un cas général de n vitres. On remarque d'après l'équation (10) que :

$$\phi_{V1} = 2\phi_{V2} - \phi_{V3} \tag{15}$$

Il vient :

$$\phi_{V1} - \phi_{V2} = \phi_{V2} - \phi_{V3} = \phi_S \tag{16}$$

Il devient donc clair que l'on peut additionner tous les ϕ_S pour n vitres. Avec ce rapide calcul, on peut obtenir l'équation suivante :

$$\boxed{\phi_{V1} - \phi_{V_N} = (n-1).\phi_S} \tag{17}$$

Cependant, pour connaître la température d'un corps noir pour n vitres, il est nécessaire d'expliciter la précédente relation à l'aide de ϕ_{CN} afin de pouvoir sortir le facteur T de l'équation comme réalisé dans la première partie.

3 Expression en fonction de ϕ_{CN}

Reprenons l'équation (11) appliqué au cas de n vitres :

$$2\phi_{V_n} =_{V_{n-1}} \tag{18}$$

et d'après l'équation (14) elle aussi appliqué au cas de n vitres :

$$\phi_{V_{n-1}} - \phi_{V_n} = \phi_S \tag{19}$$

Puis, d'après l'équation (17) :

$$\phi_{V_n} = -(n-1)\phi_S + \phi_{V1} = \phi_S \tag{20}$$

Donc :

$$n.\phi_S = \phi_{V1}$$

Puis en revenant à l'équation (1), on pourra écrire :

$$\boxed{\phi_{CN} = \phi_{V1} + \phi_S = (n+1).\phi_S = \sigma.T^4} \tag{22}$$

Voici donc une première approche des plus simplistes. Pour tenter d'approcher des situations réelles, il faudrait considérer des pertes successives après chaque traversement de vitre par la lumière.

4 Application pour n vitres avec pertes d'énergie

On considérera donc ici que chaque vitre réfléchit une fraction r du rayonnement. Dès lors, on constate facilement (d'après un schéma) :

$$\phi_{Stotal} = (1-r)^n.\phi_S \tag{23}$$

L'équation (22) nous permet d'écrire :

$$\phi_{CN} = (n+1).(1-r)^n.\phi_S \tag{24}$$

Exprimons pour terminer, la température du corps noir :

$$\boxed{T = \left(\frac{(n+1).(1-r)^n.\phi_S}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}} \tag{25}$$

Pour n,r,σ et ϕ_S connus, il est alors possible de connaître la température du corps noir au-dessus duquel il est placé n vitres. Le soin est évidemment laissé au lecteur de réaliser des applications numériques afin de se rendre compte de l'augmentation de témpérature liée à l'ajout de vitres.

Cette approche peut-être satisfaisante ici. Elle permet de rendre compte de l'effet de serre que l'on peut, par exemple, éprouver lorsque l'on rentre dans une voiture, possédant un tableau de bord noir, qui a été exposée au rayonnement solaire préalablement.

Néanmoins, il serait très intéressant de faire figurer dans l'équation le facteur temporel. Les calculs risquent d'être certainement beaucoup plus compliqué. Si un lecteur de cet article peut me proposer une solution, je l'invite fortement à me contacter.

5 Annexe : Valeur n_m conduisant à une température maximale du corps noir

Nous utiliserons tout naturellement l'outil dérivé ici. Si la témpérature du CN est maximale, alors on peut écrire :

$$\frac{d\phi_{CN}}{dn} = \sigma.\frac{dT^4}{dT} = 0 \tag{26}$$

Nous allons donc calculer le premier terme de cette équation en utilisant l'astuce mathématique suivante :

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{d(e^{x.ln(a)}}{dx} = ln(a).(e^{x.ln(a)}) = ln(a).a^x \tag{27}$$

Dès lors :

$$\frac{d\phi_{CN}}{dn} = \phi_S.\left((1-r)^n_m + (n_m+1).ln(1-r).(1-r)^n_m\right) = 0 \tag{28}$$

On montre donc bien qu'il existe une valeur n_m conduisant à une température maximale du corps noir :

$$\boxed{n_m = -\left(\frac{1}{ln(1-r)} + 1\right)} \tag{29}$$

Constantes à utiliser pour les applications numériques :
$\phi_S = 0,6kW.m^{-2}$; $\sigma = 5,67.10^{-8}W.m^{-2}.K^{-4}$; $r = 0,08$.

Note : Pour le facteur de réflection r, il peut-être intéressant de remplacer r par un pourcentage de réflection au choix qui pourrait correspondre à différents types de vitres traitées.