Utilisations du théorème de Gauss

Alexandre FAURE

5 Juillet 2007

Ce document est déstiné à quiconque souhaite comprendre le fonction du théorème de Gauss en électromagnètisme. Rappelons que ce théorème est utilisé pour calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ sur une surface à contour fermé.

Théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{E}.\vec{n}.ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{1}$$

avec :
$\vec{E}$: vecteur champ électrostatique
$\vec{n}$: vecteur normal à la surface considérée
ds : élément de surface
Q : charge totale de la distribution
ϵ_0 : permittivité du vide

1 Distribution surfacique de charges

Considérons le cas d'un cylindre de longueur infinie, d'axe z'Oz et de rayon R et qui porte une distribution surfacique uniforme de charge et de densité σ.

Nous calculerons donc en premier lieu le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en un point M de l'espace en posant $OM = \rho$. Dès lors, nous traiterons le problème en trois parties essentielles dans la considération d'un problème d'étude du champ électromagnétique. En premier lieu, nous nous attarderons sur les invariances et les symétries liées è la distribution de charge puis nous appliquerons le théorème de Gauss en exprimant les champ électromagnétique $\vec{E}(M)$.

1.1 Etude des invariances et symétries de la distribution

La figure 1.1 représente le cylindre chargé dont nous étudions la distribution.

Dans la présente application, nous utiliserons donc un repère de coordonées cylindriques de composantes (ρ, ϕ, z).

En ce qui concerne les invariances, on remarquera aisément qu'il y a invariance par translation suivant l'axe Oz ainsi que par rotation autour de ce même axe. Dès lors, nous pouvons affirmer que le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de la coordonée z ni de l'angle ϕ.

Occupons-nous maintenant des plans de symétries c'est à dire les plans :

- $e_\rho O e_z$: donc le champ $\vec{E}(M)$ n'a pas de composantes suivant e_ϕ.
- $e_\rho O e_\phi$: donc le champ $\vec{E}(M)$ n'a pas de composantes suivant e_z.

Ces considérations nous permettent dès lors, sans calculs, de prévoir la configuration spatiale du champ électrostatique $\vec{E}$:

$$\vec{E}(M) = E(\rho).e_\rho \tag{2}$$

1.2 Application du théorème de Gauss

Tout d'abord, il est nécessaire d'énoncer quelle *surface de Gauss* nous allons utiliser. Il est tout naturel ici de considérer evidemment la surface du cylindre c'est à dire la face latérale (que l'on notera $S2$) et les deux faces du haut et du bas du cylindre (respectivement $S1$ et $S3$). Dès lors, on peut utiliser présentement le théorème de Gauss tel énoncé ci-dessous :

$$\oiint_{S1+S2+S3} \vec{E}.\vec{n}.ds = \iint_{S1} E(\rho).\vec{e}_\rho.\vec{e}_z.\rho.d\rho.d\phi + \iint_{S2} E(\rho).\vec{e}_\rho.\vec{e}_\rho.\rho.d\phi.dz + \iint_{S3} E(\rho).\vec{e}_\rho.-\vec{e}_z.\rho.d\rho.d\phi \tag{3}$$

Il vient trivialement :

$$\oiint_{S1+S2+S3} \vec{E}.\vec{n}.ds = \iint_{S2} E(\rho).\vec{e_\rho}.\vec{e_\rho}.\rho.d\phi.dz = \iint_{S2} E(\rho).\rho.d\phi.dz \tag{4}$$

Dès lors, il devient simple d'intégrer l'expression :

$$\oiint_{S1+S2+S3} \vec{E}.\vec{n}.ds = E(\rho).\rho.\iint_{S2} d\phi.dz = E(\rho).\rho.\left[\phi\right]_0^{2\pi}.\left[z\right]_0^h \tag{5}$$

Soit :

$$\oiint_{S1+S2+S3} \vec{E}.\vec{n}.ds = E(\rho).\rho.2\pi.h \tag{6}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer la norme du champ électrostatique $\vec{E}$ en fonction de la charge totale du cylindre. Deux cas devrons donc être considérés :

- $\rho < R$: Il n'existe pas de charge à l'intérieur du cylindre donc la charge totale est nulle donc $E(\rho) = 0$.
- $\rho > R$: On se place désormais au niveau de la surface du cylindre. Exprimons donc la charge totale portée par ce cylindre :

$$dq = \sigma.ds = \sigma.R.d\phi.dz \tag{7}$$

D'où :

$$Q = \sigma.R.\iint d\phi.dz = \sigma.R.2\pi.h \tag{8}$$

On applique directement le théorème de Gauss en exprimant la norme du champ $\vec{E}$ (équation (6)) en fonction de la charge totale Q portée par le cylindre (équation (8)) :

$$E(\rho).\rho.2\pi.h = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(\rho) = \frac{Q}{\epsilon_0.\rho.2\pi.h} \tag{9}$$

En remplaçant Q par son expression, on obtient :

$$E(\rho) = \frac{\sigma.R.2\pi.h}{\epsilon_0.\rho.2\pi.h} \tag{10}$$

L'expression du champ électrostatique est donc :

$$E(\rho) = \frac{\sigma.R}{\epsilon_0.\rho} \tag{11}$$