Aide mémoire de mécanique - Niveau L1

Alexandre FAURE

18 août 2007

Première partie
Cinématique du point

VITESSE :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{OM}_{/R}}{dt}\right) \tag{1}$$

ACCÉLÉRATION :

$$\vec{a}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/R}}{dt}\right) = \left(\frac{d^2\vec{OM}_{/R}}{dt^2}\right) \tag{2}$$

MOUVEMENT CIRCULAIRE :

$$\vec{OM} = R.\vec{e_r} \tag{3}$$

$$\vec{v}(M)_{/R} = R.\phi.\vec{e_\phi} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = w.\vec{e_z} \wedge \vec{OM} \tag{4}$$

$$\vec{a}(M)_{/R} = -R.\dot{\phi}^2.\vec{e_r} + R.\ddot{\phi}.\vec{e_\phi} \tag{5}$$

Deuxième partie
Dynamique du point

QUANTITÉ DE MOUVEMENT :

$$\vec{p}(M)_{/R} = m.\vec{v}(M)_{/R} \tag{6}$$

LOIS DE NEWTON :

- Principe d'inertie : dans un référentiel galiléen, $\exists$ un point matériel isolé qui est en mouvement rectiligne uniforme.
- Relation fondamentale de la dynamique : dans un référentiel galiléen : $\sum \vec{F} = \frac{d.\vec{p}(M)}{dt}$.
- Principe des actions réciproques : $F_{\vec{1 \to 2}} = -F_{\vec{2 \to 1}}$.

Troisième partie
Puissance et énergie en référentiel galiléen

PUISSANCE :

$$P = \vec{F}.\vec{v} \tag{7}$$

TRAVAIL :

$$W = \int_a^b \vec{F}.\vec{d}r \tag{8}$$

ENERGIE CINÉTIQUE :

$$\frac{d.E_k}{dt} = \sum \vec{F}.\vec{v} = \sum P \tag{9}$$

CHAMP DE FORCE CONSERVATIF :

$$\delta W = \vec{F}.\vec{dr} = -dE_p \tag{10}$$

Exemples d'énergie potentielles :

Pesanteur : $\vec{F} = m.\vec{g} = m.g.\vec{e}_z \Rightarrow \mathrm{E}_p = m.g.z + cte$.
Intéraction newtonienne : $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}.\vec{e}_r \Rightarrow \mathrm{E}_p = -\frac{K}{r} + cte$.
Ressort linéaire : $\vec{F} = -k.(l - l_0).\vec{e}_x \Rightarrow \mathrm{E}_p = \frac{1}{2}.k.(l - l_0)^2 + cte$.

ENERGIE MÉCANIQUE :

$$E_m = E_k + E_p \tag{11}$$

N.B : *L'équation du mouvement peut se déduire de l'équation $E_m = cte$ ($E_p < E_m$: évolution du point mobile ; min et max d'E_p : position d'équilibre stable).*

Quatrième partie

Oscillateurs

OSCILLATEUR HARMONIQUE :

$$\ddot{x} + w_0^2 x = 0 \tag{12}$$

Le solide est soumis à une force de rappel $f = -kx \Rightarrow \mathrm{E}_p = \frac{kx^2}{2}$. Pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

OSCILLATEUR AMORTI :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + w_0^2 x = 0 \tag{13}$$

Avec $2\alpha = \frac{h}{m} = \frac{w_0}{Q}$ (Q : facteur de qualité). Il s'exerce sur le solide une force $\vec{f} = -h.\vec{v} = -h.\dot{x}.\vec{e}_x$.

Régime :
- $\alpha > w_0$: régime apériodique.
- $\alpha = w_0$: régime critique.
- $\alpha < w_0$: régime pseudo-périodique.

OSCILLATIONS FORCÉES :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + w_0^2 x = \frac{F_A(t)}{m} \tag{14}$$

Il s'exerce sur le solide une force $\vec{F_A} = F_A(t).\vec{e}_x$.

Cinquième partie

Théorème du moment cinétique

MOMENT D'UNE FORCE EN UN POINT :

$$\vec{M_O} = \vec{OM} \wedge \vec{F} \tag{15}$$

MOMENT CINÉTIQUE :

$$L_O(\vec{M})_R = m.\vec{OM} \wedge v(\vec{M})_R \tag{16}$$

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE EN UN POINT :

$$\frac{dL_O(\vec{M})_R}{dt} = M_O \tag{17}$$

MOUVEMENT À FORCE CENTRALE :

En considérant le point O fixe, le moment cinétique $L_O(\vec{M})_R$ est une constante du mouvement.

Sixième partie
Forces centrales conservatives

FORCES CENTRALES CONSERVATIVES :

$$\vec{F} = F(r).\vec{e_r} \Rightarrow F(r) = -\frac{dE_p}{dr} \tag{18}$$

CHAMP DE FORCES :

$$\vec{F} = -\alpha\frac{\vec{e_r}}{r^2} \Rightarrow E_p(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{19}$$

LOIS DE KEPLER :

Considérons ici le système solaire :
- Chaque planète décrit une ellipse dont le soleil est un foyer.
- L'aire balayée par le rayon Soleil-Planète est proportionnelle au temps mis pour la décrire.
- Le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est une constante.

Septième partie
Système de deux points matériels

CENTRE DE MASSE (BARYCENTRE) :
Pour deux points matériels M_1 et M_2 de masse respectives m_1 et m_2 :

$$\vec{OG} = \frac{m_1.\vec{OM_1} + m_2.\vec{OM_2}}{m_1 + m_2} \tag{20}$$

CINÉMATIQUE :

Décrite par la position du barycentre $\vec{r_g} = \vec{OG}$ ou relative $\vec{r} = \vec{M_1M_2}$.

CINÉTIQUE :

$$\vec{p} = (m_1 + m_2).\vec{V_g} = M.\vec{V_g} \tag{21}$$

$$\vec{L_O} = \vec{p_1} \wedge \vec{OM_1} + \vec{p_2} \wedge \vec{OM_2} \tag{22}$$

$$\vec{L'_O} = L_O + \vec{p} \wedge \vec{OO'} \tag{23}$$

$$E_k = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2 \tag{24}$$

RÉFÉRENTIEL BARYCENTRIQUE :

On note $\mathbb{R}^*$ le référentiel en translation dans $\mathbb{R}$ dans lequel la résultante cinétique est nulle.

$$\vec{p_{R^*}} = \vec{p^*} = \vec{0} \tag{25}$$

$$\vec{L_O^*} = \vec{L_{O'}^*} = \vec{L^*} \tag{26}$$

THÉORÈMES DE KOENIG :

– Moment cinétique : $\vec{L_O} = \vec{L^*} + M.\vec{v_g} \wedge \vec{OG}$.
– Energie cinétique : $\vec{E_k} = \vec{E_k^*} + \frac{1}{2}.M.\vec{v_g^2}$.

THÉORÈME DE LA PUISSANCE ÉNERGÉTIQUE :

$$\frac{dE_k}{dt} = P_{int} + P_{ext} \tag{27}$$

ATTENTION : *Il est possible que ce document ne soit pas la version définitive. D'autres notions pourront être ajoutées ultérieurement.*

`http ://alexandre.etudes.free.fr`