

L3 PHYSIQUE FONDAMENTALE
~
TRAVAUX PRATIQUES SUR ORDINATEURS

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

~

ETUDE D'ÉCOULEMENTS DE FLUIDES IDEAUX

ALEXANDRE FAURE et JULIEN DUPRE DE BAUBIGNY

2008 - 2009

Dans ce deuxième rapport de mécanique des milieux continus, nous étudierons un type précis d'écoulements de fluides : l'écoulement irrotationnel caractérisé par la propriété mathématique $\overline{rot} \times \vec{v} = 0$. Puis dans la deuxième partie de ce rapport, nous nous pencherons sur le cas des écoulements tourbillonnaires (modèle de tornade).

Nous nous limiterons aux cas des fluides incompressibles imposant la condition $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, parfait (le terme de la viscosité de cisaillement $\eta = 0$) et stationnaire ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$). Nous considérerons également que les forces extérieures sont nulles ($F = 0$).

I/ Ecoulement irrotationnel

Considérons un cas sans tourbillon avec la vorticité de notre fluide qui devient nulle : $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$. Dans ce cas, il est possible de trouver un potentiel scalaire $\phi(\vec{r})$ impliquant la relation suivante appelée équation de Laplace :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \Delta \phi = 0$$

Pour déterminer le champ de vitesse que l'on veut visualiser dans le cas présent grâce à l'utilisation de l'outil informatique Matlab, nous avons besoin de résoudre cette équation. Pour simplifier les calculs, nous travaillerons dans l'espace complexe à deux dimensions x et y avec $z = x + iy$. On posera la fonction suivante :

$$f(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

I_a/ Vérifions dans un premier temps que ϕ et ψ sont des solutions de l'équation de Laplace suivante :

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

Dans un premier temps on veut prouver que :

$$\Delta \phi = 0$$

On utilisera donc la représentation complexe défini par les équations complexes suivantes :

$$f'(x + iy) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$if'(x + iy) = \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Cependant, on peut écrire naturellement :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = if'(z)$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(z) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -f''(z)$$

Dès lors :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''(z) - f''(z) = 0$$

Ce qui, en séparant partie réelle et imaginaire, revient à écrire :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Vérifiant ainsi l'équation de Laplace.

Prouvons maintenant que $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$ ce qui revient à prouver la relation suivante (après avoir réalisé le produit scalaire) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

Or, on sait que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = if'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Après division par i dans la deuxième expression et identification, on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

On obtient donc bien l'expression développée du produit scalaire entre le gradient de ϕ et de ψ , vérifiant ainsi notre seconde équation de Laplace.

I_b/ A l'aide du programme mathématique Matlab fluide.m, nous allons maintenant représenter graphiquement les lignes de courant, les équipotentielles et les vecteurs vitesse des écoulements suivants.

Nous définirons les bords du graphique :

```
xmin= -2;  
xmax= 2;  
ymin= -2;  
ymax= 2;
```

et l'argument complexe : $z = x + i*y$;.

i) Ecoulement uniforme : $f(z) = Vz$

Ce qui sera traduit dans notre programme par les écritures suivantes :

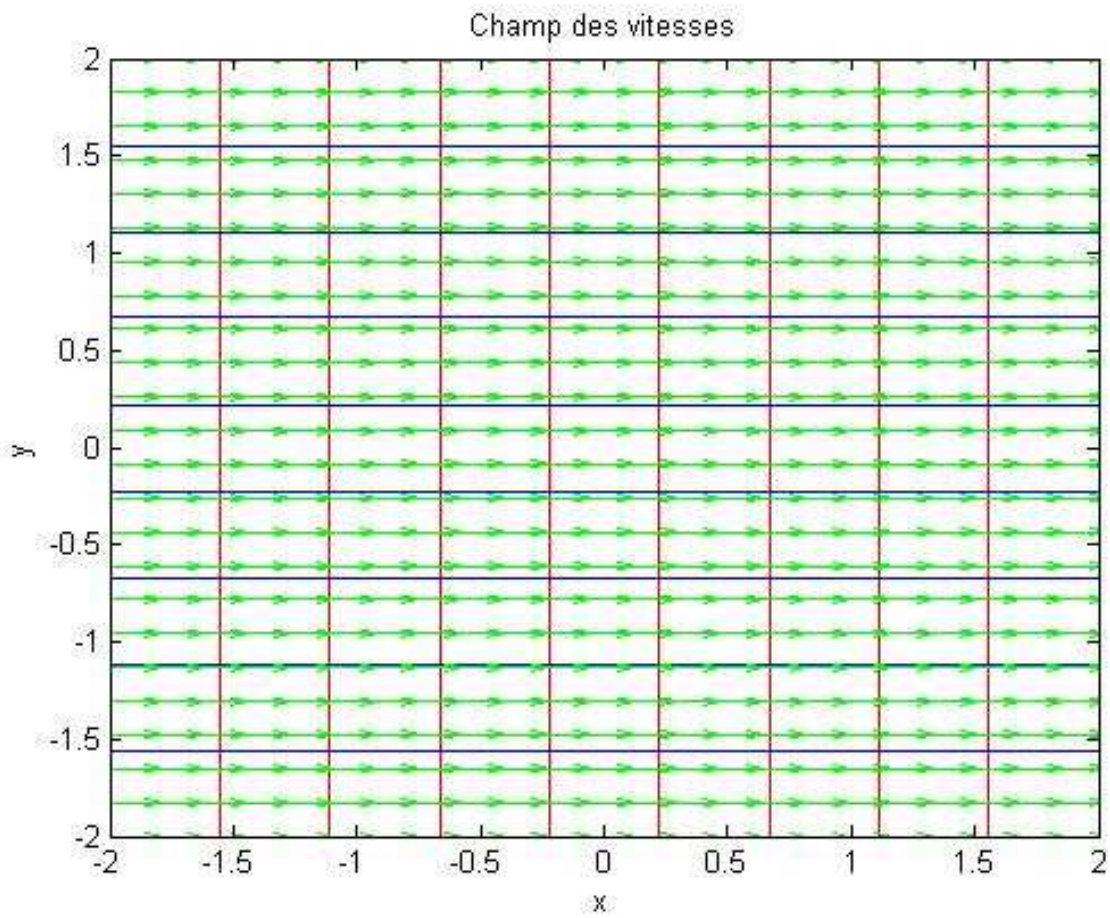
$$f(l, k) = V * z;$$

On choisira également d'entrer les expressions analytiques des dérivées après calculs faits « à la main » :

$$v_x(l, k) = V;$$

$$v_y(l, k) = 0;$$

Et on obtient la figure suivante :



ii) Ecoulement radial : $f(z) = V a \log(z)$

Les lignes du programme qui nous intéressent sont donc :

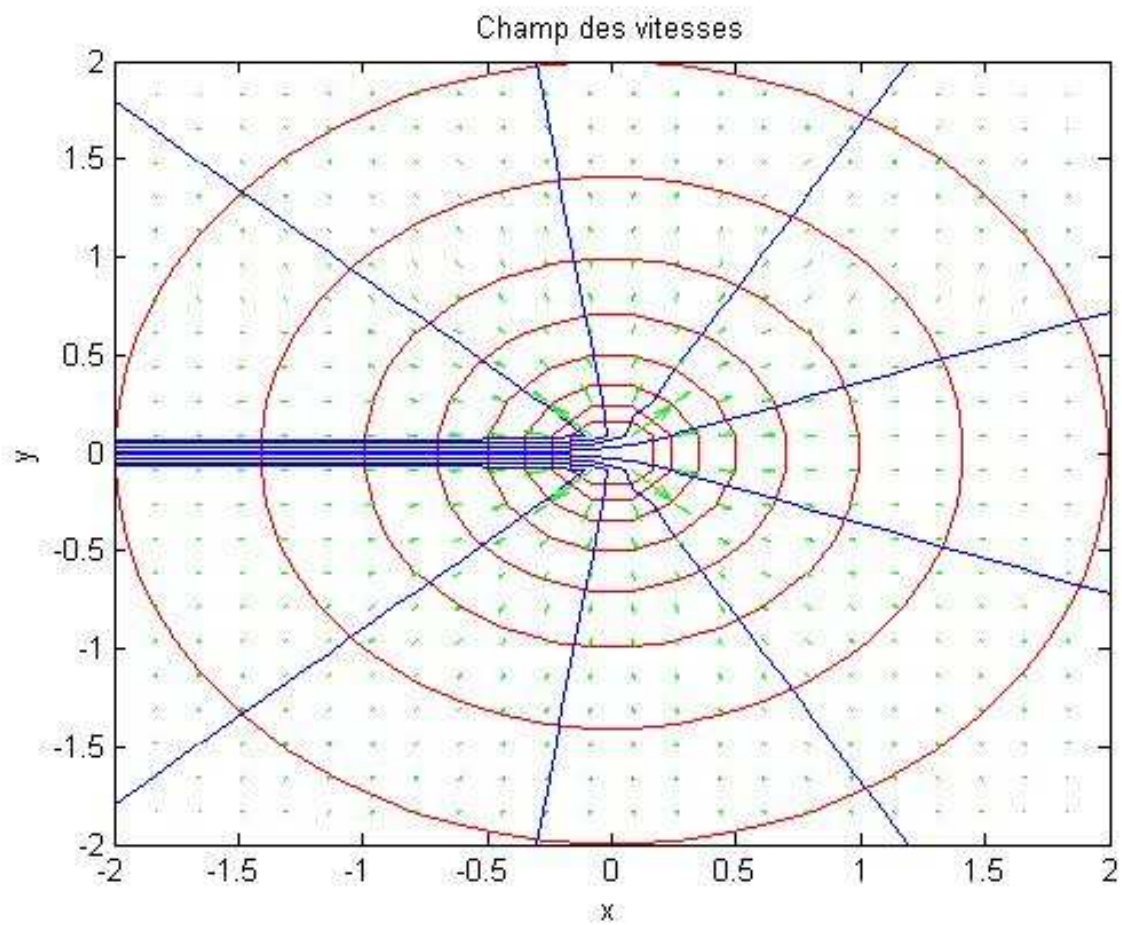
```
f(l,k)=V*a*log(z);
```

et

```
vx(l,k)= V*a*x/(r*r);
```

```
vy(l,k)= V*a*y/(r*r);
```

On obtient le résultat suivant :



iii) Ecoulement rotationnel : $f(z) = i V a \log(z)$

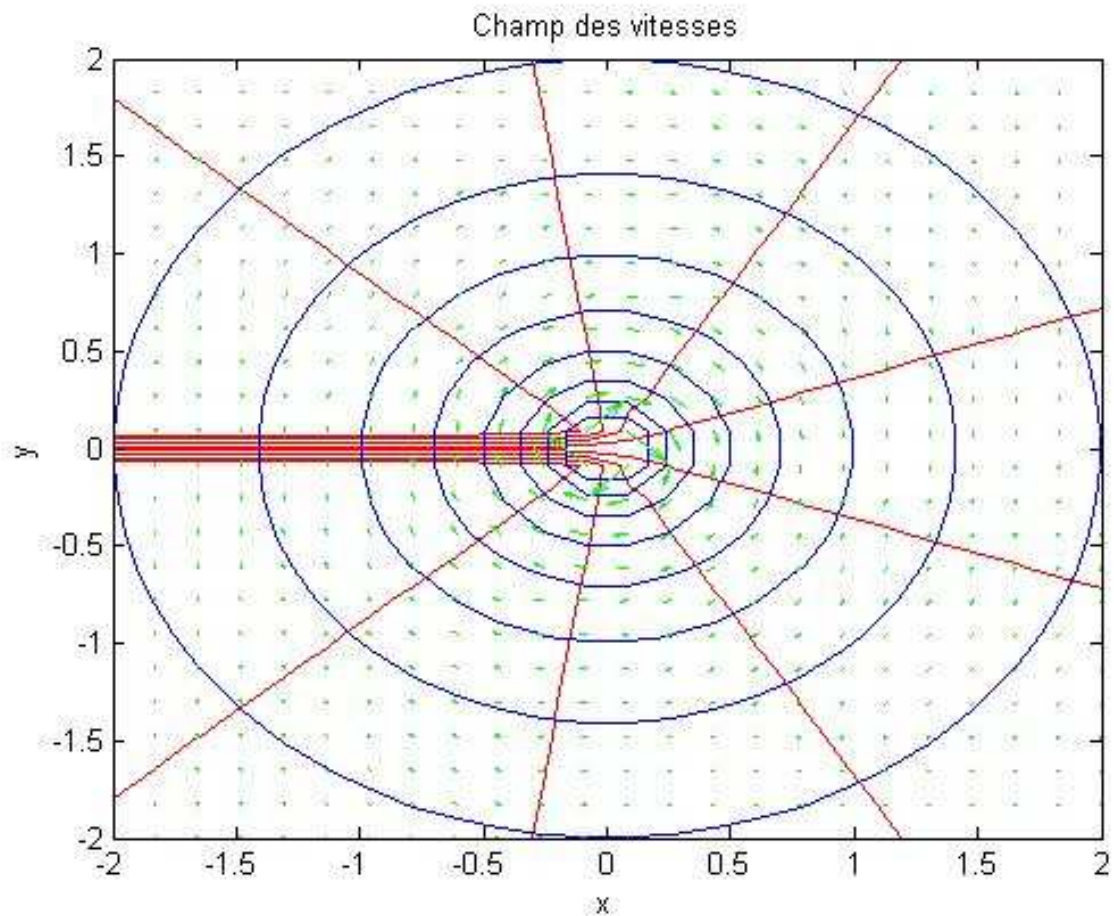
Les lignes du programme qui nous intéressent sont donc :

```
f(1,k)=j*V*a*log(z);
```

et

```
vx(1,k)= V*a*((y/(x*x))*(1/(1+(y/x)^2)));  
vy(1,k)= -V*a*(1/(x+y^2/x));
```

On obtient le résultat suivant :



On observe bien que le champ de vitesse « tourne » véritablement autour de notre figure centrale contrairement au cas précédent où l'écoulement était seulement radial.

iv) Ecoulement autour d'un cylindre de rayon a : $f(z) = V(z + \frac{a^2}{z})$

Les lignes du programme qui nous intéressent sont donc :

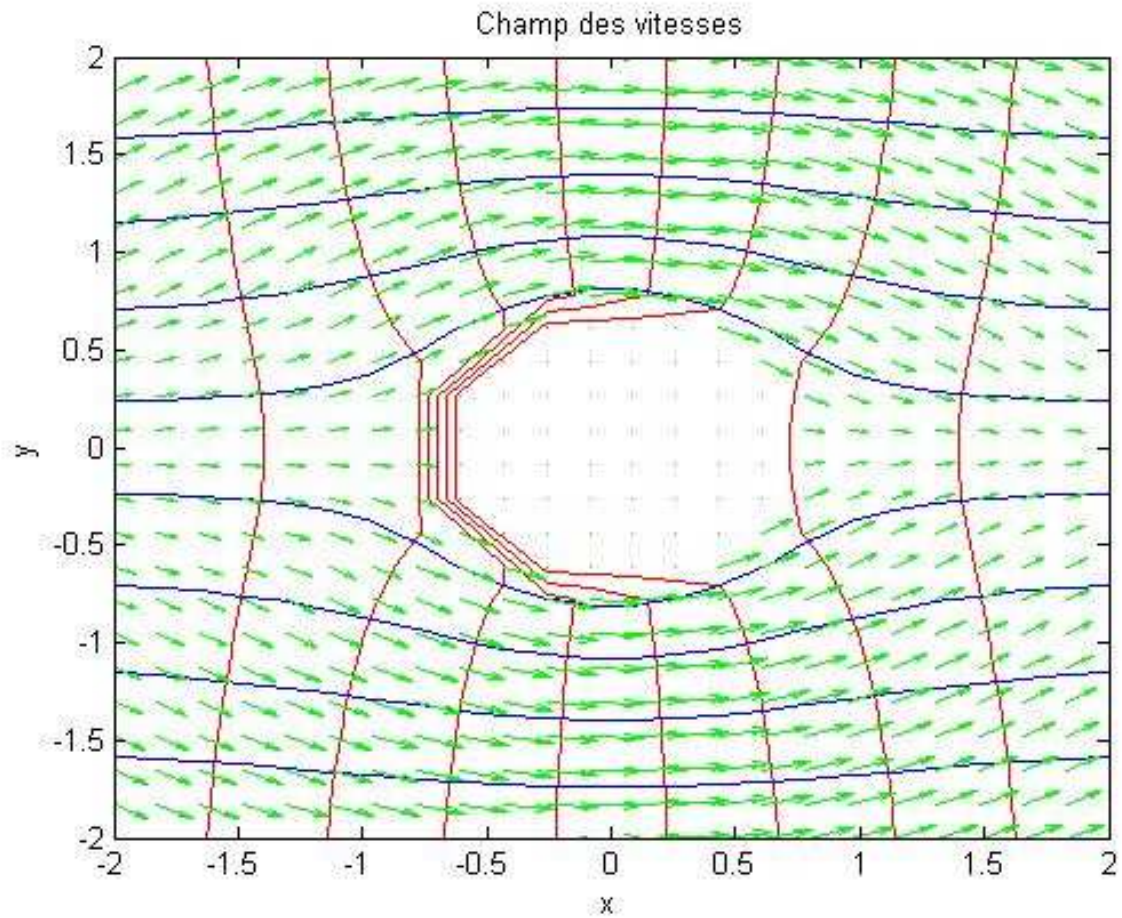
```
f(1,k)=V*(z+a^2/z);
```

et

```
vx(1,k)= V+V*(a^2)*((y^2-x^2)/(r^2));
```

```
vy(1,k)= -V*(a^2)*x*((2*y)/(r^2));
```

On obtient le résultat suivant :



v) Ecoulement rotationnel autour d'un cylindre de rayon a :

$$f(z) = V \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + iV a \log(z)$$

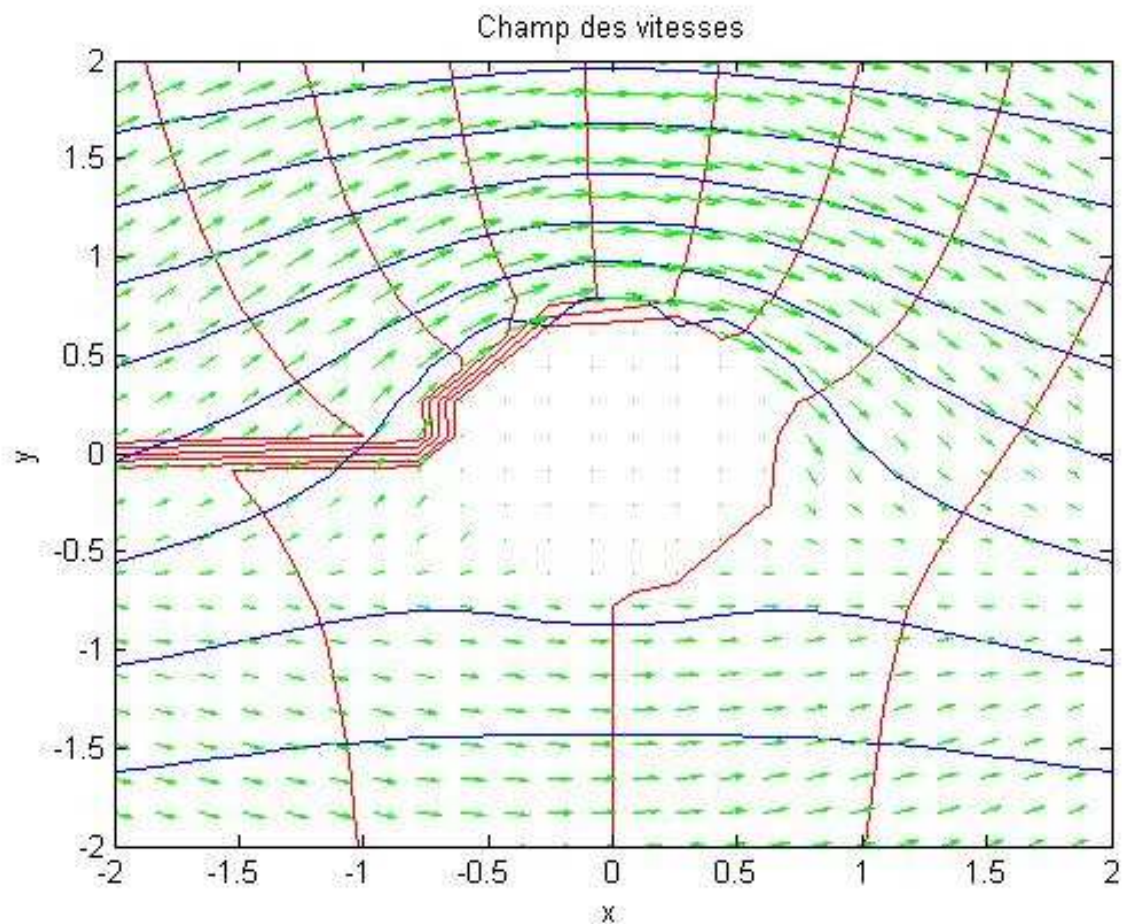
Les lignes du programme qui nous intéressent sont donc :

```
f(1,k)=V*(z+(a^2/z))+i*V*a*log(z);
```

et

```
vx(1,k)= V+V*a^2*((y^2-x^2)/(r^2))+V*a*(y/x^2)*(1/(1+(y/x)^2));
vy(1,k)= -V*a^2*x*(2*y)/(r^2)-V*a*(1/(x+(y^2/x)));
```

On obtient le résultat suivant :



Une nouvelle fois, on peut aisément noter la différence avec le cas précédent : le champ de vitesse est plus important vers le haut du cylindre du fait de son mouvement rotatoire.

I_c/ Nous souhaitons maintenant calculer l'intégrale suivante :

$$I = \rho_0 \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} dl$$

Or, cette intégrale peut s'écrire également sous la forme :

$$I = \iint \operatorname{div} \vec{v} ds = 0$$

Le calcul de cette intégrale dans les cas i), iii) et iv) nous donnent bien $I = 0$ vérifiant ainsi cette équation. En revanche, dans le cas ii), on ne peut pas utiliser cette expression du fait du caractère radial de l'écoulement. On observe, une singularité en $r = 0$.

Après calcul numérique, on obtient pour le cas ii) :

$$I_{ii)} = 1,346858$$

I_d/ On veut tracer le profil de pression $p(\vec{r})$. Pour cela nous utiliserons l'équation de Bernoulli :

$$\rho_0 \frac{v^2}{r} + p = p_0$$

Démontrons cette équation :

Tout d'abord, il faut noter que l'on considère un écoulement de fluide parfait ($\eta = 0$), incompressible et stationnaire d'où :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\dots) = 0$$

Dès lors, on a trivialement :

$$\rho \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow \rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{V^2}{2} \right)$$

Et d'après l'équation de Navier-Stokes incompressible, on peut naturellement écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{V^2}{2} \right) = -V_i \frac{\delta(p + \rho\phi)}{\delta x_i} = -\frac{d}{dt} (p + \rho\phi)$$

Soit encore :

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{V^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} (p + \rho\phi) = \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho\phi \right) = 0$$

On retrouve bien l'équation de Bernoulli valable uniquement sur la trajectoire de la particule (ligne de courant).

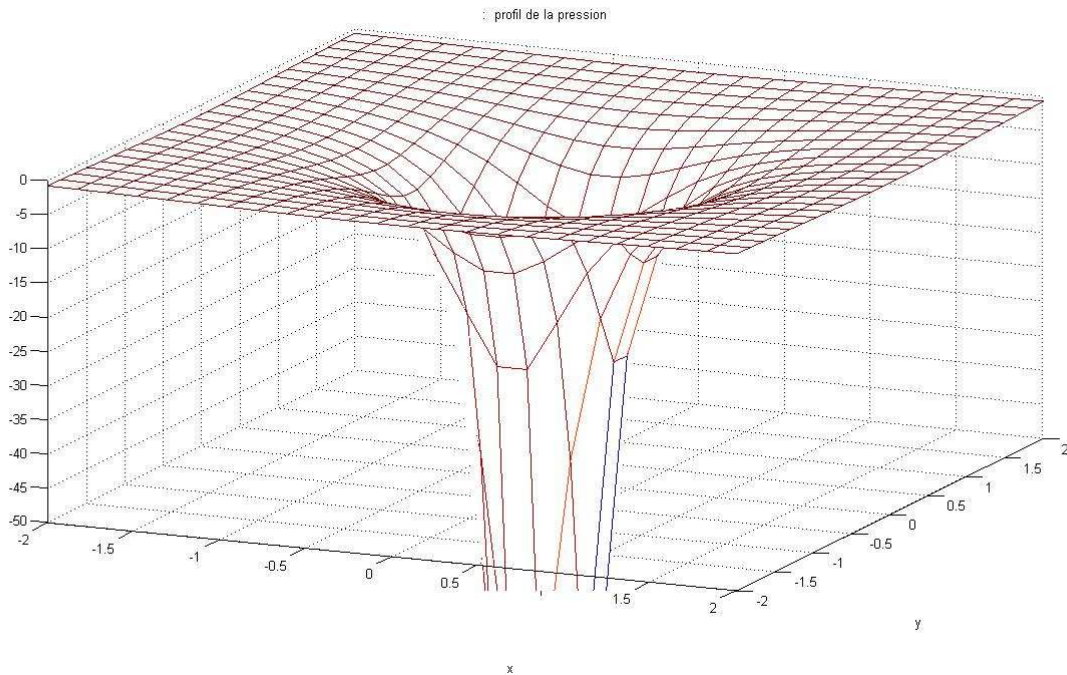
```

p0= 0 ;

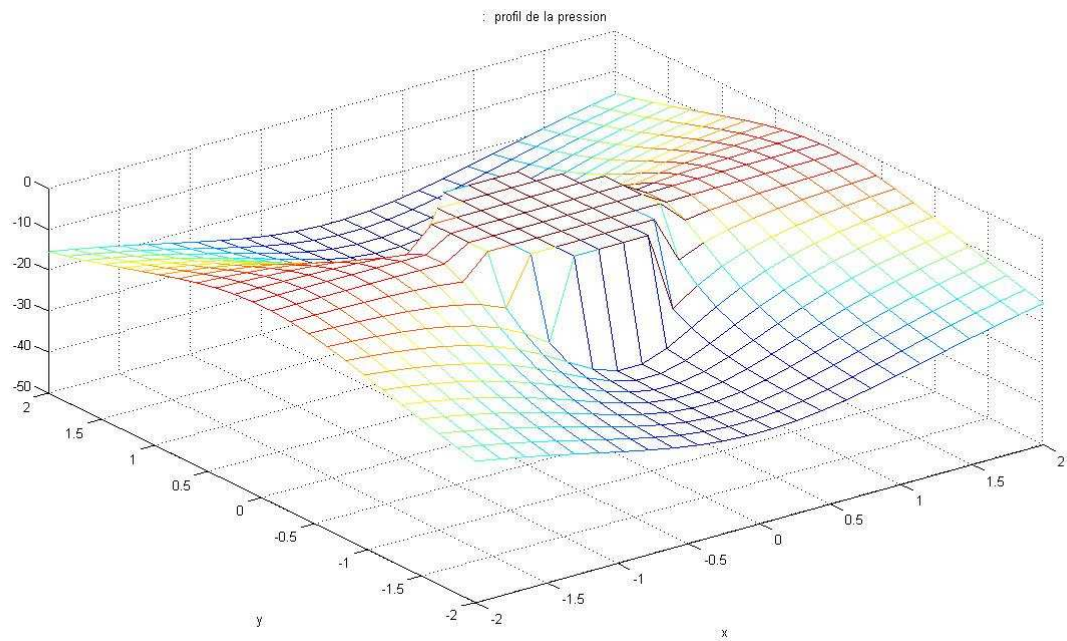
%%% calculer le profil de pression
for k=1:length(x_vec)
    for l=1:length(y_vec)
        p(l,k)= p0-rho0*((vx(l,k))^2+(vy(l,k))^2)/2 ;
    end
end
end

```

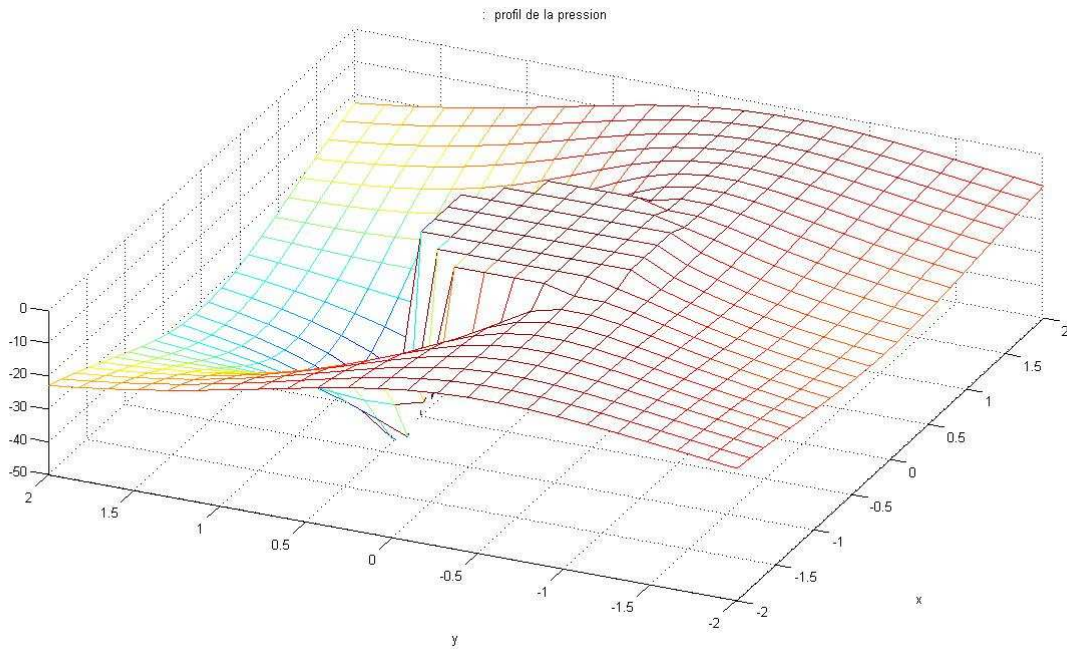
On représente maintenant le profil de pression :



Cas ii) et iii) : On observe une singularité au point $r = 0$ du à la vitesse qui varie en $\frac{1}{r}$ impliquant inévitablement une divergence au point $r = 0$.



Cas iv)



Cas v)

II/ Écoulement tourbillonnaire : modèle d'une tornade

On considère une tornade comme un écoulement permanent et incompressible pour un fluide parfait. Une solution possible est de la forme :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{a} \wedge \vec{r} \quad \text{pour } (r < r_0)$$

Or \vec{a} n'a pas de composante suivant \vec{e}_r et $\vec{v} \perp \vec{a}$ et $\vec{v} \perp \vec{r}$ donc $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_z$. Dès lors, on peut calculer le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{a} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} 0 & x & -ay \\ a & 0 & 0 \\ 0 & y & ax \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ 0 \end{pmatrix}$$

Grâce à l'expression de la vorticité, déterminons notre constante a :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v} = \Omega \cdot \vec{e}_z$$

Et avec l'expression de $\vec{v}(\vec{r})$, nous trouvons l'expression du facteur a :

$$a = \Omega$$

Donc

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix}$$

De même pour le cas $r > r_0$ traité précédemment (Exercice 1 b) iii)), on pourra alors rentrer les expressions suivantes :

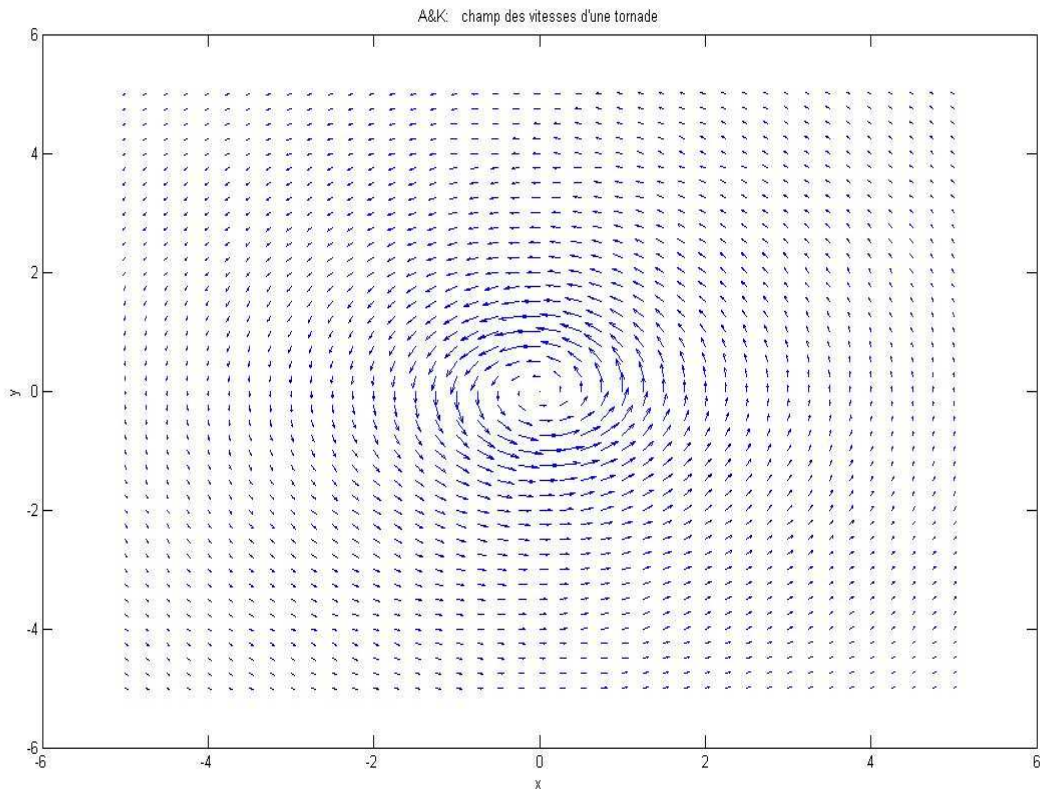
```

if(r<r0)
    vx_val= - Omega*y ;
    vy_val= Omega*x ;
else
    vx_val= - Omega*r0^2*y/(x^2+y^2);
    vy_val= Omega*r0^2*x/(x^2+y^2) ;
end;

```

On exprimera donc la continuité du champ de vitesse en r_0 en introduisant le terme r_0^2 dans le programme.

II_b/ Et on obtient la représentation du champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r})$:



II_c/ On se propose de calculer l'intégrale de rotation :

$$R \equiv \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

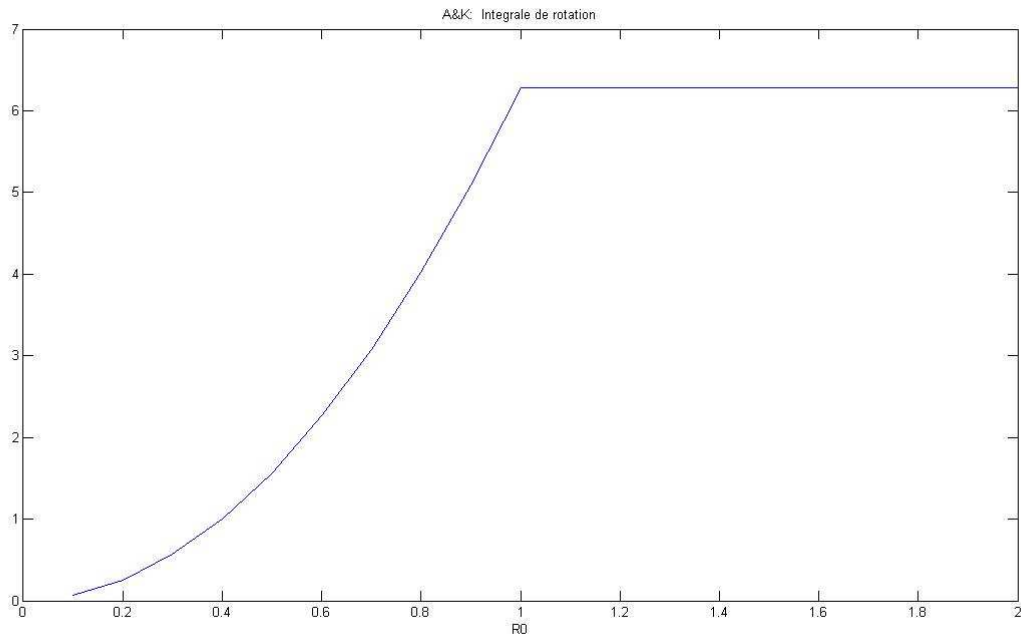
Avec le chemin γ qui est un cercle de rayon R_0 et de centre \vec{r}_m .

En utilisant le théorème de Stokes, on peut calculer cette intégrale analytiquement :

$$R \equiv \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e}_z dS = 2 \iint \vec{\omega}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_z dS = 2 \iint \Omega r dr d\varphi = 2\pi r^2 \text{ pour } r < R_0$$

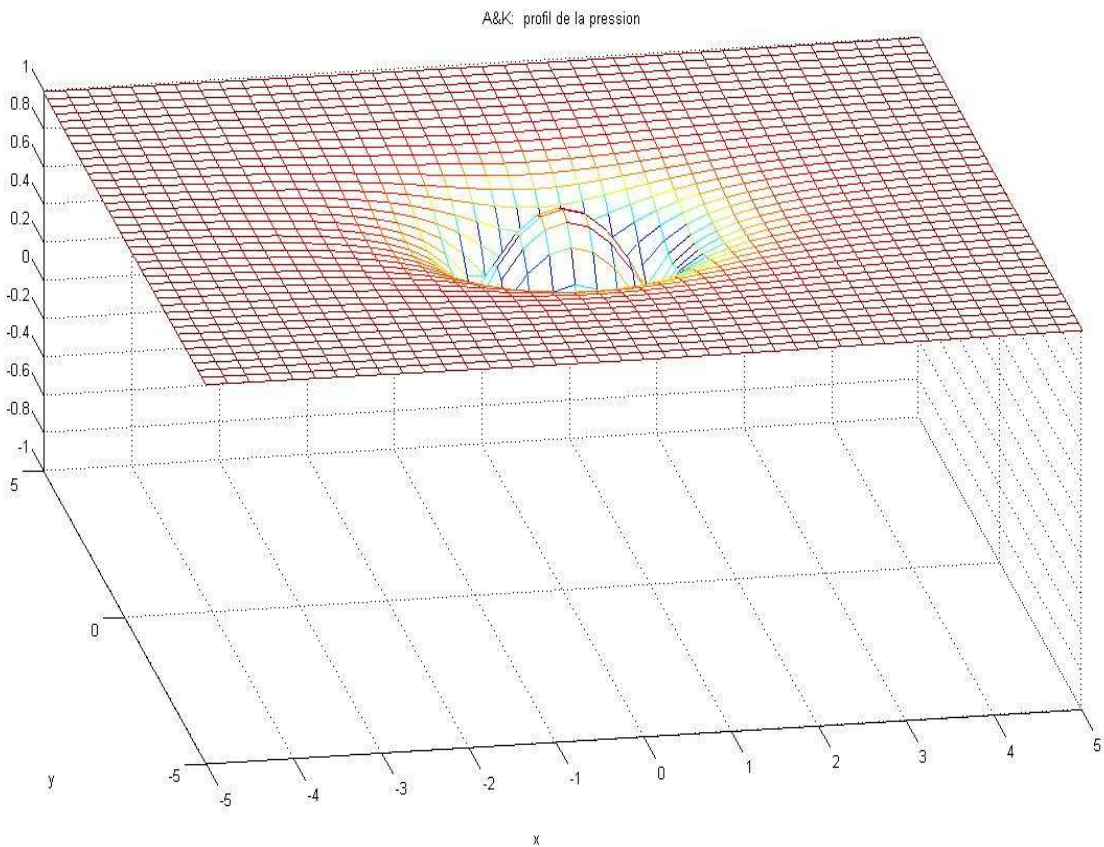
et $R = 2\pi R_0^2$ pour $r > R_0$

Cette expression confirme ce que nous obtenons ci-dessous avec une croissance en r^2 de 0 à R_0 et une valeur constante pour $r > R_0$.



II_d/ Pour terminer ce travaux dirigé, nous représenterons graphiquement le profil de la pression obtenu avec notre programme :

```
r= sqrt(x*x+y*y);
if(r<r0)
    p(1,k)=p0-0.5*Omega^2*(x^2+y^2);
else
    p(1,k)=p0-rho0*(vx(1,k)^2+vy(1,k)^2)/2;
end;
```



On n'applique pas Bernoulli ici car les lignes de courant sont circulaires (les calculs sont complexes). Donc on utilise une équation de Bernoulli modifiée pour calculer la pression pour $r < R_0$.

Conclusion : Ce dernier exercice sur l'écoulement tourbillonnaire nous a permis de mettre en pratique des théorèmes connus de la mécanique des fluides notamment le théorème de Bernoulli. On peut donc par exemple comprendre à la suite de ce Travaux Dirigé, pourquoi l'œil du cyclone est une zone « relativement » (nous ne conseillons pas au lecteur de tenter l'expérience) moins dangereuse dans une tornade.

