

L3 PHYSIQUE FONDAMENTALE  
~  
TRAVAUX PRATIQUES SUR ORDINATEURS

ONDES MATERIELLES ET OPTIQUE

ALEXANDRE FAURE et JULIEN DUPRE DE BAUBIGNY

2008 - 2009

## I/ Propagation d'une onde à une dimension dans un milieu homogène

Dans cette première partie, nous proposerons l'étude de la propagation d'une onde à une dimension grâce à une résolution numérique de l'équation d'onde ou équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2_{\phi}(z)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Avec le terme  $v^2_{\phi}(z)$  désignant la vitesse de l'onde.

La méthode numérique utilisée sera celle du développement de Taylor limité au terme d'ordre 2 (jusqu'à  $(\delta t)^2$ ).

Les calculs détaillés dans le fascicule de l'énoncé permettent de comprendre très rapidement l'intérêt d'une telle méthode. On obtient rapidement une équation reliant  $\psi(z, t + \delta t)$  en fonction de  $\psi(z, t = 0)$  (ou  $\psi_0(z)$ ) et  $\psi(z, \delta t)$ . Nous disposons également d'une autre équation reliant  $\psi(z, \delta t)$  à  $\psi(z, t = 0)$  et sa dérivée  $\dot{\psi}(z, t = 0)$ . Par conséquent, on obtient une relation reliant notre fonction d'onde à déterminer  $\psi(z, t + \delta t)$  en fonction de  $\psi(z, t = 0)$  et  $\dot{\psi}(z, t = 0)$ , c'est-à-dire, en fonction de ses conditions initiales (position et vitesse à l'instant  $t=0$ ).

En fonction du type de modélisation d'onde que l'on veut effectuer, il ne reste plus qu'à modifier ces conditions initiales :

- Fonction d'onde est nulle aux deux limites = corde fixée aux deux extrémités.
- Dérivée de la fonction d'onde par rapport à  $z$  est nulle = extrémités libres d'une corde.
- Combinaison des conditions précédentes = extrémité fixée et l'autre libre.

Dans le présent rapport, on étudiera la propagation de l'onde dans un milieu homogène ce qui signifie que la vitesse  $v_{\phi}(z)$  ne dépend pas de  $z$  et s'écrit donc  $v_{\phi}$ .

De plus, on connaît la forme générale de la solution en terme d'onde progressive :

$$\psi(z, t) = F(z - v_{\phi}t) + G(z + v_{\phi}t)$$

qui permet de rendre compte qu'il s'agit d'une onde qui se propage sans déformation dans le sens des  $z$  positifs et une onde qui se propage également sans déformation dans le sens des  $z$  négatifs. On pourra aussi notifier le fait qu'on parle d'onde transversale car le déplacement est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.

## I.1/ Bords de la corde fixes

Nous allons résoudre numériquement l'équation d'onde (1) pour une perturbation initiale de la forme :

$$\psi_0(z) = Ae^{-(z-z_0)^2/\beta^2} \quad \text{et} \quad \dot{\psi}_0(z) = 0$$

avec la fonction d'onde nulle aux extrémités de la grille, c'est-à-dire que l'on rajoute les conditions suivantes :

$$\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$$

avec L : longueur de la corde.

Le programme utilisé est corde1.m. Il est composé de trois parties principales : une partie paramètres à modifier en fonction du problème étudié, une partie mathématique utilisant la résolution de l'équation d'onde grâce au développement de Taylor et une partie graphique pour l'observation des résultats.

Nous utiliserons les valeurs suivantes dans notre programme :  $v_\phi=1$ ,  $L=1$ ,  $A=L/10$ ,  $z_0=0$  ( $z(0)$ ),  $\beta=0,1$  ( $\beta$ ),  $N_z=100$  (nombre de points en z) et  $\delta t = \delta z * 0,9/v_\phi$  et  $N_t=1000$  (pas en temps).

Pour  $\delta t$  ( $\delta t$ ), la formule est obtenue grâce à la formule suivante :

$$\alpha \cdot v_\phi^2 = 0,8 = \left( \frac{\delta t \cdot v_\phi}{\delta z} \right)^2$$

d'où l'on extrait  $\delta t$  :  $\delta t = \frac{\sqrt{0,8} \cdot \delta z}{v_\phi}$ .

Pour les conditions initiales, on complétera le programme de la façon suivante :

```
psi_0(i_z) = A*exp(-(z(i_z)-z_0)^2/beta^2);  
psi_point_0(i_z) = 0;
```

ainsi que pour les conditions aux bords :

```
psi(1)=0;  
psi(N_z)=0 ;
```

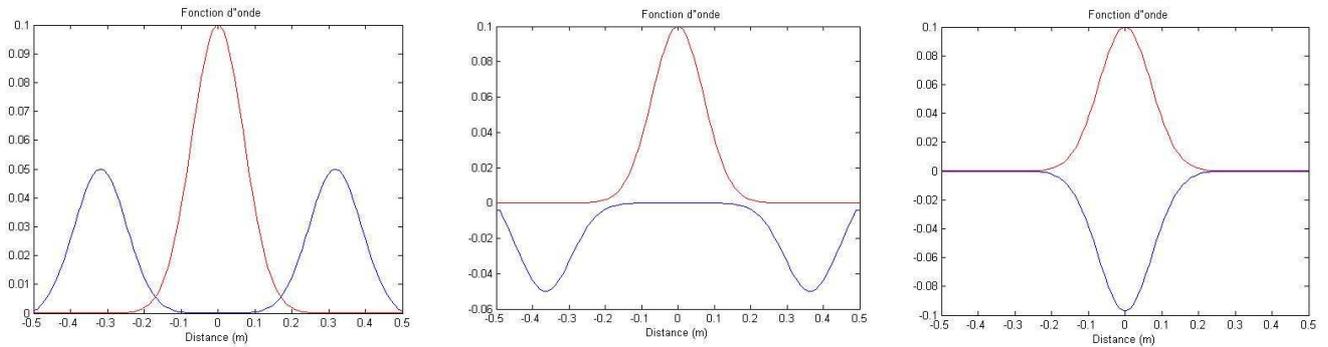
on complétera aussi également de la même manière les conditions aux bords dans la boucle :

```
psi_plus(1)=0;  
psi_plus(N_z)=0
```

avec respectivement  $\psi(1)$  extrémité à gauche de la corde et  $\psi(N_z)$  extrémité à droite de la corde. Etant égales à 0, les fonctions d'ondes aux bords permettent de modéliser des extrémités fixes.

Remarque : il faudra prendre garde à modifier les conditions aux bords également dans la boucle du programme pour que les modifications prennent effet.

On obtient donc une succession de graphe présentant l'évolution de la courbe dans ces conditions. On présentera 3 images clés représentatives du film observé :



Comme l'on pouvait évidemment s'y attendre, le comportement diffère du comportement analytique d'une corde infinie. Dans ce cas, il n'y aurait pas de conditions aux bords et l'onde se propagerait dans les deux directions sans qu'il y ait réflexion arrivé aux bords.

## I.2/ Bords de la corde libres

Etudions ce deuxième cas de la même manière que précédemment. Nous garderons les mêmes paramètres pour le calcul à ceci près que nous modifierons les conditions aux bords de la façon suivante.

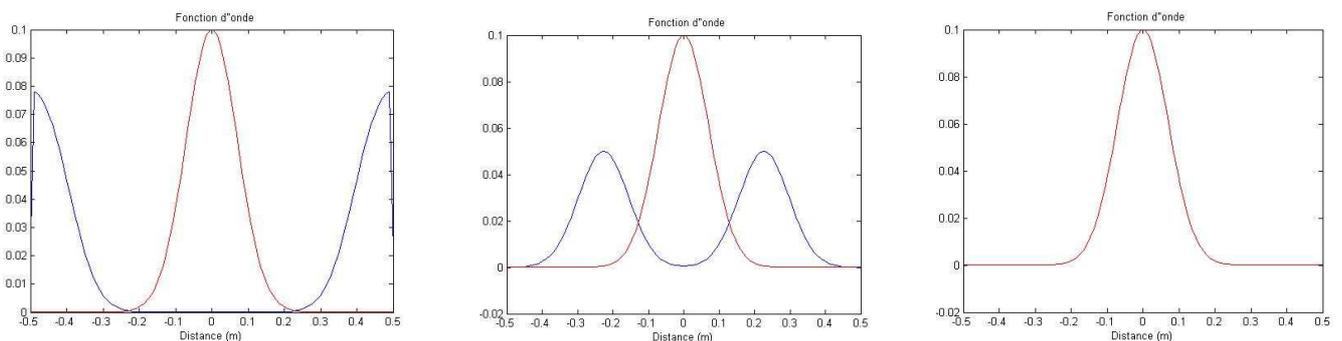
On modélisera les bords libres de la corde en indiquant au programme de prendre la valeur de la fonction d'onde suivante (pour psi (1)) ou précédente (pour psi (N\_z)) pour les conditions aux bords.

Les lignes qui nous intéressent deviennent donc :

```
psi(1)=psi(2);
psi(N_z)=psi(N_z-1);
```

```
psi_plus(1)=psi_plus(2) ;
psi_plus(N_z)=psi_plus(N_z-1) ;
```

On obtient ainsi les résultats suivants :



Dès lors, on peut constater le déplacement toujours présent dans les z positifs et négatifs mais avec un déplacement transversal présent uniquement dans les x positifs.

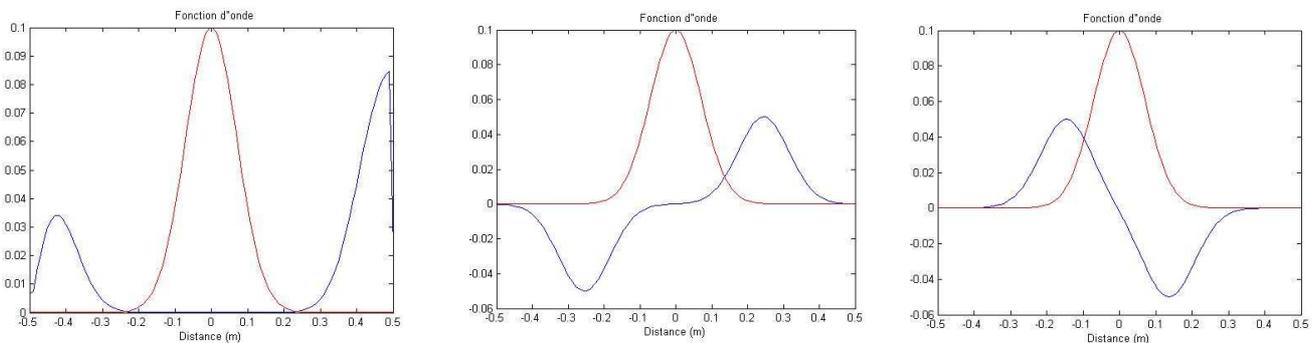
Note : on notera l'axe vertical x pour caractériser qualitativement le déplacement transversal.

### I.3/ Bord gauche fixe et bord droit libre

De la même manière, on modifie le programme de la façon suivante :

```
psi(1)=0;
psi(N_z)=psi(N_z-1);

psi_plus(1)=0;
psi_plus(N_z)=psi_plus(N_z-1);
```



On observe bien que le côté droit est effectivement libre notamment sur la première image. Ceci implique le déplacement transversal dans les x négatifs d'une partie de l'onde et d'un autre déplacement transversale dans les x positifs de l'autre partie de l'onde étudiée.

### I.4/ Onde unique se propageant dans le milieu

On gardera les derniers paramètres utilisés du programme c'est-à-dire une corde avec bord gauche fixe et bord droit libre.

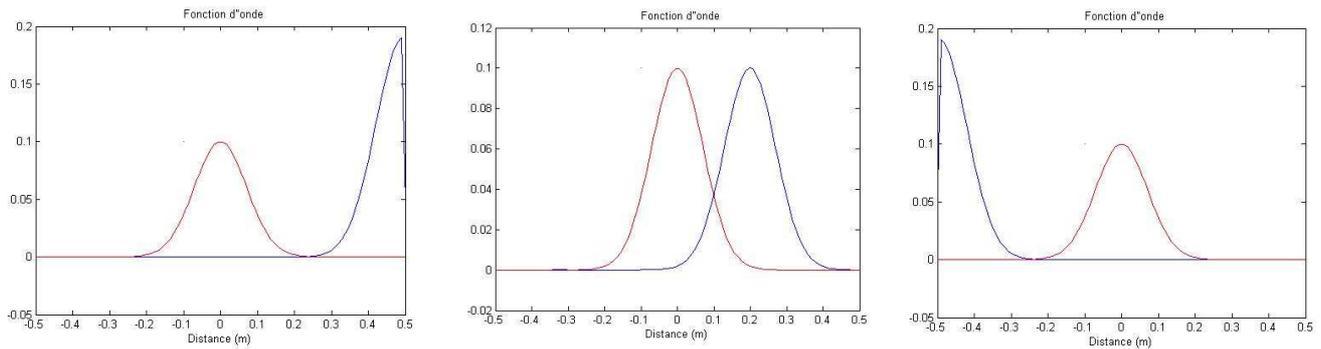
Pour produire une onde qui se déplace dans une seule direction, par exemple :  $\psi(z, t) = F(z - v_\phi t)$ , il faut imposer les conditions initiales sur  $\psi_0(z)$  tel que :

$$\dot{\psi}_0(z) = -v_\phi \frac{\partial \psi_0}{\partial z}$$

Dans le programme, on remplira le champ suivant après avoir dérivée  $\psi_0(z) = A \cdot e^{-(z-z_0)^2/\beta^2}$  :

```
psi_point_0(i_z)=
2*vphase*(A/beta^2)*(z(i_z)-z_0)*exp((z(i_z)-z_0)^2/beta^2);
```

On obtient les résultats graphiques suivants :



Il y donc bien propagation dans une seule direction dans la direction des z positifs et des x positifs pour la perturbation.

Vérification par le calcul numérique :

Nous immobiliserons la courbe pour qu'elle aille d'un point à un autre en  $N\Delta t$ . Puis nous mesurerons avec la règle présente sur les graphique des courbes Matlab© le  $\Delta x$  que nous diviserons par  $N$ .

Or  $v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$  et  $\Delta t = \text{delta\_t} * N\_t = 0,0091 * 25 = 0,2275$ . Puis, nous mesurons  $\Delta d$  sur le graphe :  $\Delta d = 0,2374$  et on en déduit  $v_\phi$  :

$$v_\phi = 1,04$$

On retrouve bien la valeur de  $v_\phi$  choisie au début de notre rapport, c'est-à-dire 1 ( $v_\phi$  est très proche de 1). La modélisation est donc correcte.

Conclusion : En résolvant numériquement l'équation d'onde grâce à la méthode du développement de Taylor, on a observé que l'on pouvait modéliser le comportement d'une corde dans un milieu homogène en modifiant seulement ses conditions initiales qui permettront d'étudier plusieurs cas de propagation d'ondes.

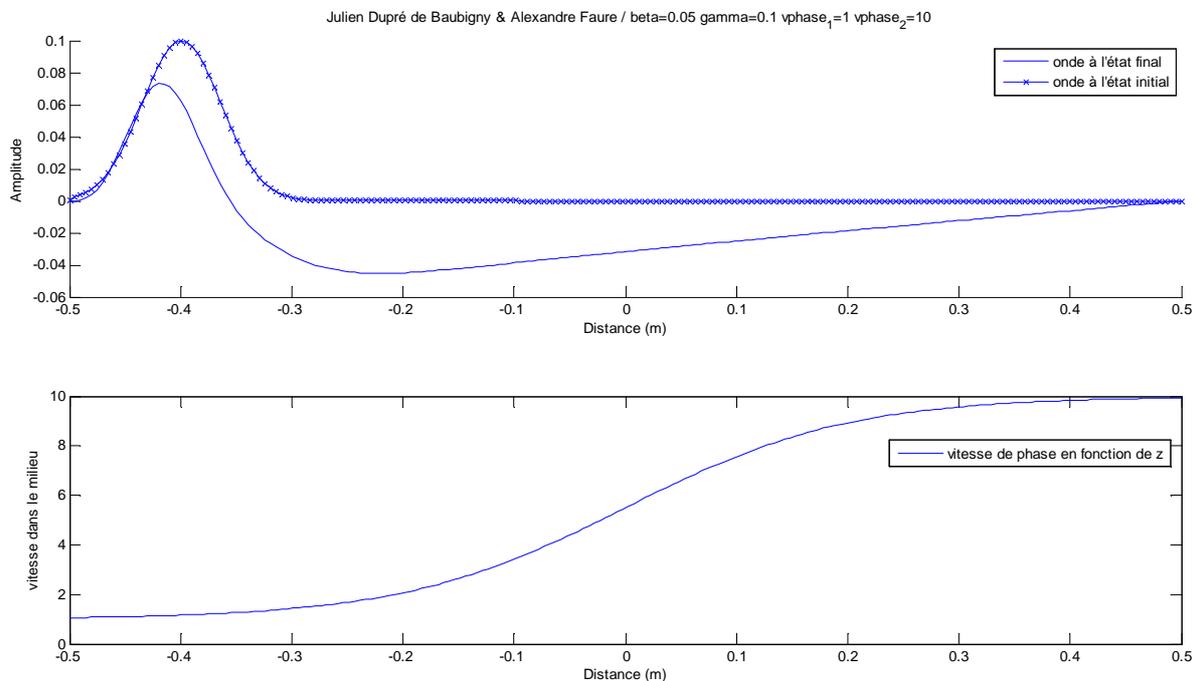
## II/ Propagation d'une onde dans un milieu inhomogène

Dans cette partie nous considérons toujours une corde se propageant dans un milieu à une dimension ( $z$ ), mais dans un milieu inhomogène ; c'est-à-dire que les propriétés du milieu changent en fonction de  $z$  tel que :

$$v_{\varphi}(z) = \frac{v_1}{1 + e^{\frac{z}{\gamma}}} + \frac{v_2}{1 + e^{-\frac{z}{\gamma}}}$$

De plus, à l'instant  $t = 0$  on installe une perturbation gaussienne  $\psi_0(z)$ , centrée en  $z = z_0 < 0$  et telle qu'elle se déplace vers les  $z$  positifs.

### II.1/ Tracé de $\psi_0(z)$ et $v_{\varphi}(z)$



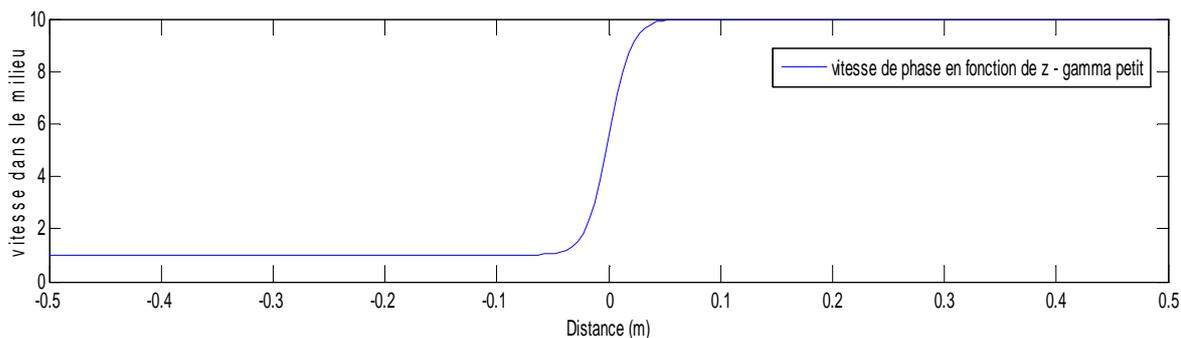
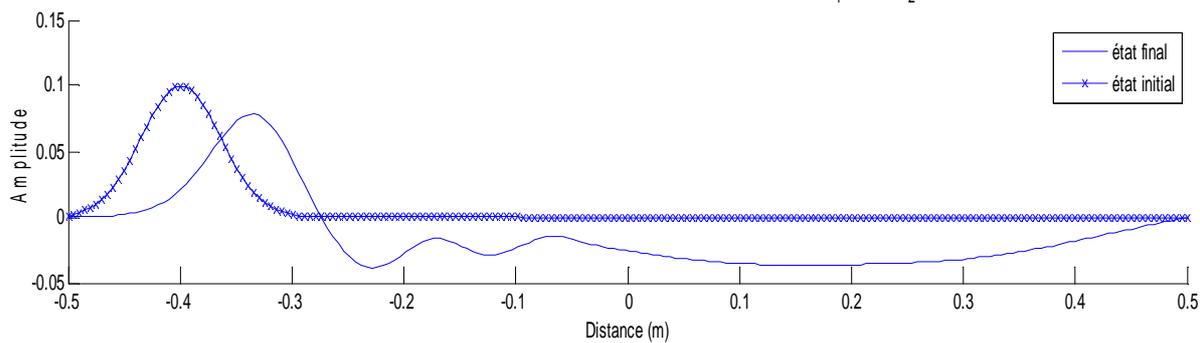
On observe donc une onde se propageant d'un milieu 1 à un milieu 2. Pour cela, on tracera l'onde à l'état initial et à l'état final sur le graphique du haut ainsi que la représentation de la vitesse de phase dans le milieu.

### II.2/ Influence du facteur $\gamma$

Nous choisissons ici :  $v_1 = 1$  et  $v_2 = 10$  pour modéliser le changement de milieu. (Lorsque  $v_1 = v_2$  nous obtenons la propagation triviale dans un milieu homogène.)

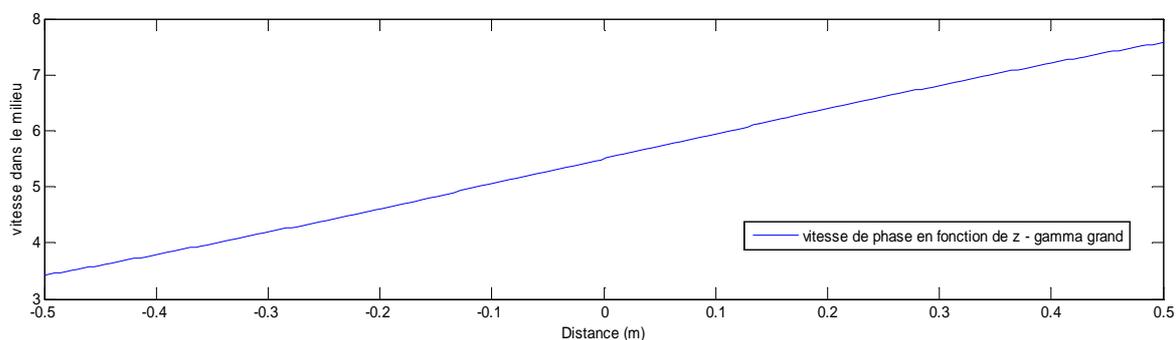
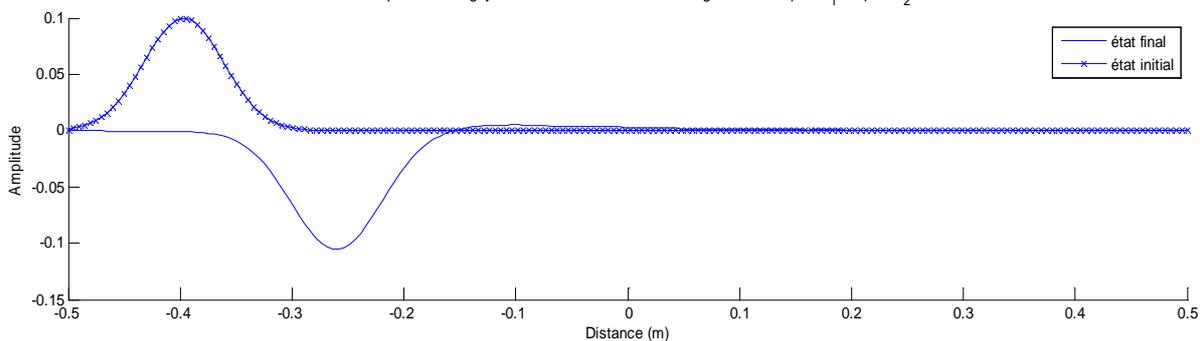
Nous remarquons que plus nous diminuons  $\gamma$ , plus la transition entre les deux phases est brusque ; et plus nous l'augmentons plus la transition est douce.

Julien Dupré de Baubigny & Alexandre Faure /  $\beta=0.05$   $\gamma=0.01$   $\nu_{\text{phase}_1}=1$   $\nu_{\text{phase}_2}=10$



$\gamma = 0,01$

Julien Dupré de Baubigny & Alexandre Faure /  $\beta=0.05$   $\gamma=0.5$   $\nu_{\text{phase}_1}=1$   $\nu_{\text{phase}_2}=10$



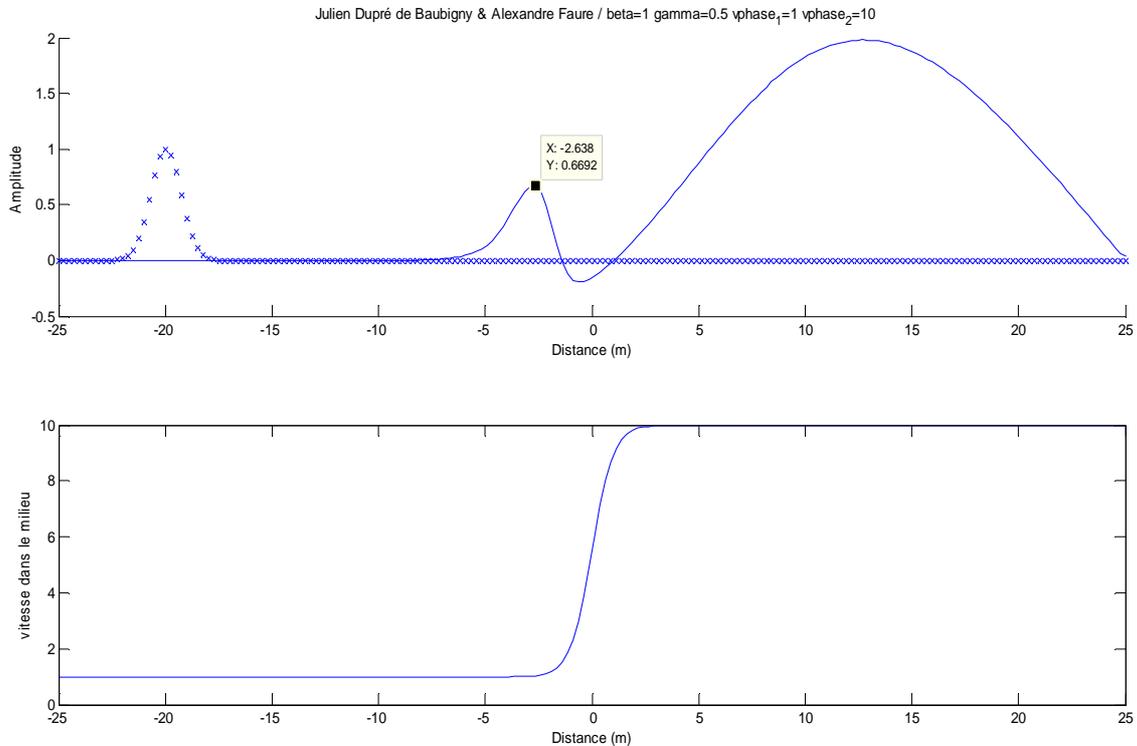
$\gamma = 0,5$

Une transition brusque se remarque par la présence d'une onde réfléchie de forte amplitude, alors que pour  $\gamma = 0,5$  nous sommes dans l'approximation WKB : il n'y a pas d'onde réfléchie.

### II.3/ Amplitudes et comparaison avec les formules analytiques

Ici, nous prendrons  $A = 1$  et  $L = 10$ .

Pour  $\gamma = 0,5$  on mesure  $t = 1,98$  et  $r = 0,67$  grâce au graphique suivant :



En effet le calcul analytique confirme ces résultats :

$$r = \frac{v_{\varphi 2} - v_{\varphi 1}}{v_{\varphi 2} + v_{\varphi 1}} = \frac{10 - 1}{10 + 1} = 0,82$$

$$t = \frac{2v_{\varphi 2}}{v_{\varphi 2} + v_{\varphi 1}} = \frac{2 \times 10}{10 + 1} = 1,82$$

On constate que les valeurs sont relativement proches.

Conclusion : Dans ce rapport, nous avons pu mettre en évidence la propagation d'une onde dans un milieu inhomogène en modifiant les vitesses des deux milieux de propagation. On remarquera que la modification du facteur  $\gamma$  permet de modéliser les différents type de changement, à savoir rapide et lent (approximation WKB).