



EQUATION DES GÉODÉSIQUES DANS UN ESPACE-TEMPS DE  
SCHWARZSCHILD-(ANTI-) DE SITTER : SOLUTIONS ANALYTIQUES ET  
APPLICATION À L'ANOMALIE PIONEER

*Alexandre FAURE*

Juin 2010



## Résumé

Ce rapport est le résultat des travaux effectués lors du stage de recherche pour le diplôme de Master 1 de Physique Fondamentale préparé à l'Université Paul Sabatier (Toulouse III). Le stage porte sur l'analyse des solutions analytiques de l'équation des géodésiques dans un espace-temps de Schwarzschild-(anti)-de Sitter et ses applications au problème non résolu de l'anomalie Pioneer. *Centre d'Etudes Spatiale des Rayonnements (CESR) - Juin 2010.*

# Table des matières

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Anomalie Pioneer et relativité générale</b>                         | <b>5</b>  |
| 1          | Motivations  | 6         |
| 2          | L'anomalie Pioneer   | 7         |
| 2.1        | Les sondes Pioneer 10 et 11 . . . . .                                  | 7         |
| 2.2        | L'anomalie d'accélération . . . . .                                    | 9         |
| 2.3        | Origines de l'anomalie . . . . .                                       | 9         |
| 2.3.1      | Les causes écartées . . . . .  | 9         |
| 2.3.2      | Les recherches actuelles . . . . .                                     | 10        |
| 3          | L'utilité de la relativité générale                                    | 11        |
| <b>II</b>  | <b>Notions de relativité générale</b>                                  | <b>12</b> |
| 4          | Bases et généralités   | 13        |
| 4.1        | L'espace-temps courbe . . . . .  | 13        |
| 4.1.1      | L'espace-temps . . . . .   | 13        |
| 4.1.2      | La métrique . . . . .  | 13        |
| 4.1.3      | La métrique de Minkowski . . . . .                                     | 14        |
| 4.1.4      | Le cône de lumière . . . . .   | 15        |
| 4.2        | Métrique de Schwarzschild . . . . .                                    | 15        |
| 4.3        | Outils mathématiques . . . . .   | 16        |
| 4.3.1      | Repérage dans un espace vectoriel . . . . .                            | 16        |
| 4.3.2      | La dérivée covariante . . . . .  | 16        |
| 4.3.3      | Crochet de Lie . . . . .   | 16        |
| 4.3.4      | Les symboles de Christoffel . . . . .                                  | 17        |
| 4.3.5      | Les tenseurs . . . . .   | 17        |
| 5          | Equations fondamentales  | 19        |
| 5.1        | Equation d'Einstein . . . . .  | 19        |
| 5.2        | Equation de la géodésique . . . . .                                    | 19        |
| <b>III</b> | <b>Solution des équations de la géodésique dans un espace-temps de</b> |           |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Schwarzschild</b>   | <b>21</b> |
| <b>6 Equation de la géodésique</b>   | <b>22</b> |
| 6.1 Démonstration de l'équation de la géodésique . . . . .   | 22        |
| 6.1.1 Formalisme de Lagrange . . . . .   | 22        |
| 6.1.2 Formalisme relativiste . . . . .   | 23        |
| 6.2 Etablissement de la métrique de Schwarzschild . . . . .  | 24        |
| 6.2.1 Les approximations de la métrique de Schwarzschild . . . . .   | 25        |
| 6.2.2 Diagonalisation de la métrique . . . . .   | 25        |
| 6.2.3 Utilisation de l'équation d'Einstein . . . . .   | 26        |
| 6.2.4 Calculs des symboles de Christoffel . . . . .  | 26        |
| 6.2.5 Calcul des tenseurs de Ricci . . . . .   | 30        |
| 6.2.6 Détermination des coefficients $A(r)$ et $B(r)$ . . . . .  | 32        |
| 6.2.7 Equation de Schwarzschild ( $\Lambda = 0$ ) . . . . .  | 33        |
| 6.2.8 Equation de Schwarzschild ( $\Lambda \neq 0$ ) . . . . .   | 35        |
| <b>7 Potentiel effectif et résolution de l'équation de la géodésique</b>   | <b>37</b> |
| 7.1 Considérations géométriques . . . . .  | 37        |
| 7.2 Introductions de nouveaux paramètres . . . . .   | 37        |
| 7.3 Expression du potentiel effectif d'une particule dans l'espace-temps de Schwarzschild . . . . .                        | 38        |
| 7.4 Représentations graphiques de la composante $g_{tt}$ de la métrique et du potentiel effectif de la particule . . . . . | 39        |
| 7.4.1 Composante $g_{tt}$ de la métrique . . . . .   | 39        |
| 7.4.2 Potentiel effectif d'une particule avec ou sans masse . . . . .  | 42        |
| 7.5 Obtention de l'intégrale du "problème de l'inversion" . . . . .  | 49        |
| 7.5.1 Moyens proposés pour la résolution de cette intégrale . . . . .  | 50        |
| <b>8 Solution de l'équation du mouvement dans un espace-temps Schwarzschild-(anti)-de Sitter</b>                           | <b>52</b> |
| 8.1 Eléments de géométrie différentielle . . . . .   | 52        |
| 8.2 Trajectoire pour une particule sans masse . . . . .  | 53        |
| 8.2.1 Tentative de modélisation avec les fonctions de Weierstrass . . . . .  | 54        |
| 8.2.2 Tentative de modélisation grâce aux séries . . . . .   | 54        |
| <b>9 Modélisation des trajectoires des particules test</b>   | <b>56</b> |
| 9.1 Choix de l'équation maîtresse . . . . .  | 56        |
| 9.2 Racines du polynôme . . . . .  | 57        |
| 9.2.1 Recherche du nombre de zéros en fonction de $\mu$ et $\lambda$ . . . . .   | 57        |
| 9.3 Originalité de notre approche . . . . .  | 60        |
| 9.4 Modélisation des orbites . . . . .   | 61        |
| 9.4.1 Description du programme . . . . .   | 61        |
| 9.5 Résultats obtenus sans constante cosmologique ( $\Lambda = 0$ ) . . . . .  | 62        |
| 9.5.1 Cas d'une particule sans masse . . . . .   | 63        |
| 9.5.2 Cas d'une particule massive . . . . .  | 64        |
| 9.5.3 Trajectoires applicables à l'anomalie Pioneer . . . . .  | 67        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>10 Influence de la constante cosmologique</b>   | <b>68</b>  |
| 10.1 Modifications des trajectoires observées . . . . .  | 68         |
| 10.1.1 Influence sur les orbites terminales . . . . .  | 68         |
| 10.1.2 Influence sur les orbites circulaires . . . . .   | 70         |
| 10.2 Analyse numérique des données des sondes Pioneer . . . . .  | 70         |
| 10.2.1 Paramètres de l'étude . . . . .   | 71         |
| 10.2.2 Résultats attendus . . . . .  | 71         |
| 10.2.3 Utilisation du programme Matlab . . . . .   | 71         |
| 10.2.4 Développement d'un programme sous Maple . . . . .   | 73         |
| <b>11 Conclusions et perspectives</b>  | <b>75</b>  |
| 11.1 La constante cosmologique . . . . .   | 75         |
| 11.2 Ouvertures . . . . .  | 76         |
| 11.3 Bilan du stagiaire . . . . .  | 77         |
| 11.4 Remerciements . . . . .   | 78         |
| <b>IV Annexes</b>  | <b>79</b>  |
| <b>12 Programmation Matlab</b>   | <b>80</b>  |
| 12.1 Code du graphique $g_{tt}$ de la métrique . . . . .   | 80         |
| 12.1.1 Graphique de $g_{tt}$ . . . . .   | 81         |
| 12.2 Code du graphique du potentiel effectif newtonien . . . . .   | 83         |
| 12.2.1 Graphique du potentiel effectif newtonien . . . . .   | 86         |
| 12.3 Code du graphique du potentiel effectif relativiste . . . . .   | 90         |
| 12.3.1 Graphique du potentiel effectif relativiste . . . . .   | 93         |
| 12.4 Code du graphique du potentiel effectif cosmologique . . . . .  | 97         |
| 12.4.1 Graphique du potentiel effectif cosmologique . . . . .  | 100        |
| 12.5 Programme $(\mu, \lambda)$ du nombre de racines du polynôme $P_5(u)$ . . . . .  | 104        |
| 12.6 Graphique $(\mu, \lambda)$ du nombre de racines du polynôme $P_5(u)$ pour une particule<br>avec ou sans masse . . . . . | 105        |
| 12.7 Programme <code>plots of orbits</code> . . . . .  | 108        |
| <b>13 Programmation Maple</b>  | <b>113</b> |
| 13.1 Résultats obtenus avec le programme Maple . . . . .   | 114        |
| 13.1.1 Pour la sonde Pioneer 10 . . . . .  | 114        |
| 13.1.2 Pour la sonde Pioneer 11 . . . . .  | 115        |
| <b>Bibliographie</b>   | <b>116</b> |

Première partie

**Anomalie Pioneer et relativité  
générale**

# Chapitre 1

## Motivations

Sujet d'étude de plusieurs recherches depuis ces trente dernières années, l'anomalie Pioneer est un des seuls phénomènes qui résiste encore aux confirmations théoriques prédites par la théorie de la relativité générale. Ce sujet passionnant est l'objet d'étude d'un article récent : *Geodesic equation in Schwarzschild-(anti)-de Sitter space-times : Analytical solutions and applications* - Physical Review D 78,024035 (2008) publié par Eva Hackmann et Claus Lämmerzahl de l'Université de Brême. Il présente une résolution détaillée des solutions analytiques de l'équation de la géodésique dans un espace à métrique de Schwarzschild en passant par le problème d'inversion de Jacobi restreint à la recherche des zéros de la fonction theta. Les différents types d'orbites obtenus sont analysés en terme d'énergie et de moment angulaire.

L'intérêt de cet article est de proposer une possible explication de l'anomalie Pioneer par l'intervention de la constante cosmologique  $\Lambda$ .

L'objectif principal est d'étudier l'équation de la dynamique du mouvement d'une particule se mouvant dans un espace-temps régi par la métrique de Schwarzschild. Il sera nécessaire de se pencher sur les notions de relativité générale et d'introduire certains outils mathématiques.

## Chapitre 2

# L'anomalie Pioneer

L'anomalie Pioneer est une des applications des résultats présentés dans ce rapport. Nous présenterons brièvement les missions Pioneer et le problème rencontré actuellement pour l'explication de cette anomalie.

### 2.1 Les sondes Pioneer 10 et 11

Comme leur nom l'indique, les missions Pioneer 10 et 11 ont été des sondes pionnières dans l'histoire de l'exploration lancées par la NASA.

La sonde Pioneer 10 a été lancée le 2 mars 1972 et fut le premier engin spatial à voyager à travers la ceinture d'astéroïdes située entre les orbites de Mars et Jupiter et la première sonde à réaliser des observations directes et détaillées de Jupiter. De plus, il s'agit actuellement de l'objet le plus lointain que l'homme ait jamais envoyé depuis la Terre (au-delà de 100,735 AU soit une distance d'environ 15 milliards de kilomètres en 2010) et qui permit de réaliser plusieurs mesures scientifiques importantes dans les régions éloignées du système solaire (après avoir été accélérées par le champ gravitationnel de Jupiter). Ce fut l'occasion d'étudier notamment les particules solaires (vent solaire) et les rayons cosmiques entrant dans notre portion de Galaxie. Elle termina sa mission le 31 mars 1997. Cependant, le faible signal envoyé par la sonde fut capté par la NASA's Deep Space Network (DSN) et le dernier signal utile en télémétrie reçu date du 27 avril 2002.

La sonde Pioneer 11, lancée le 5 avril 1973, avait pour but de compléter celle de Pioneer 10 en explorant de nouveau la planète Jupiter et le système solaire lointain et fut la première à explorer Saturne et ses anneaux principaux. L'une de ses missions fut d'explorer de façon plus précise les caractéristiques de l'atmosphère de Jupiter et Saturne. A l'instar de Pioneer 10, la sonde utilisa également l'attraction gravitationnelle de Jupiter pour évoluer hors du système solaire. Sa mission fut réellement terminée en novembre 1995 quand les ingénieurs de la NASA reçurent le dernier message radio exploitable.

Les sondes Pioneer restent les sondes pour lesquelles la navigation la plus précise a été obtenue à la fin des années 1970. Cependant, les transmissions radios de la sonde ont soulevé quelques problèmes de mesures et d'analyse de données.



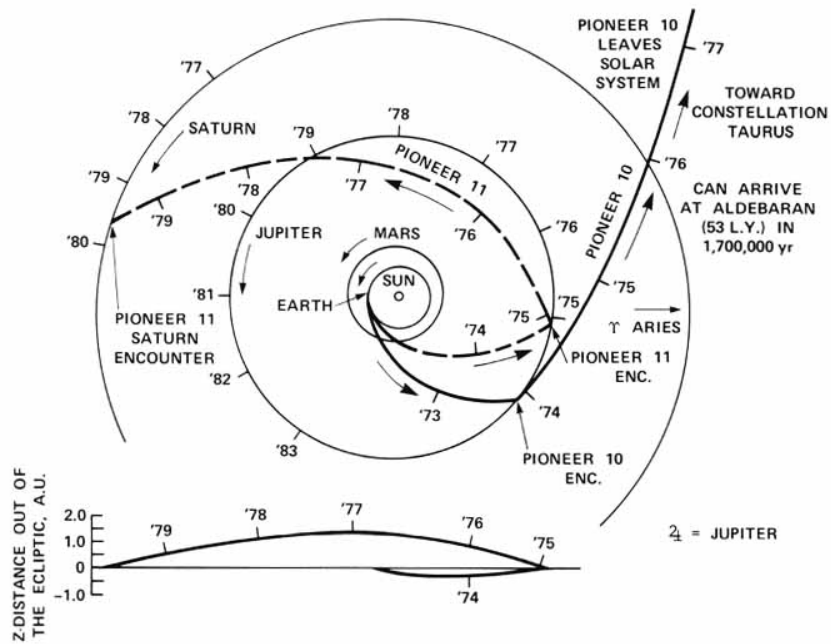


FIGURE 2.1 – Trajectoires de capture des sondes Pioneer 10 et 11 dans le système solaire vues du haut de l'écliptique (Crédits : NASA).

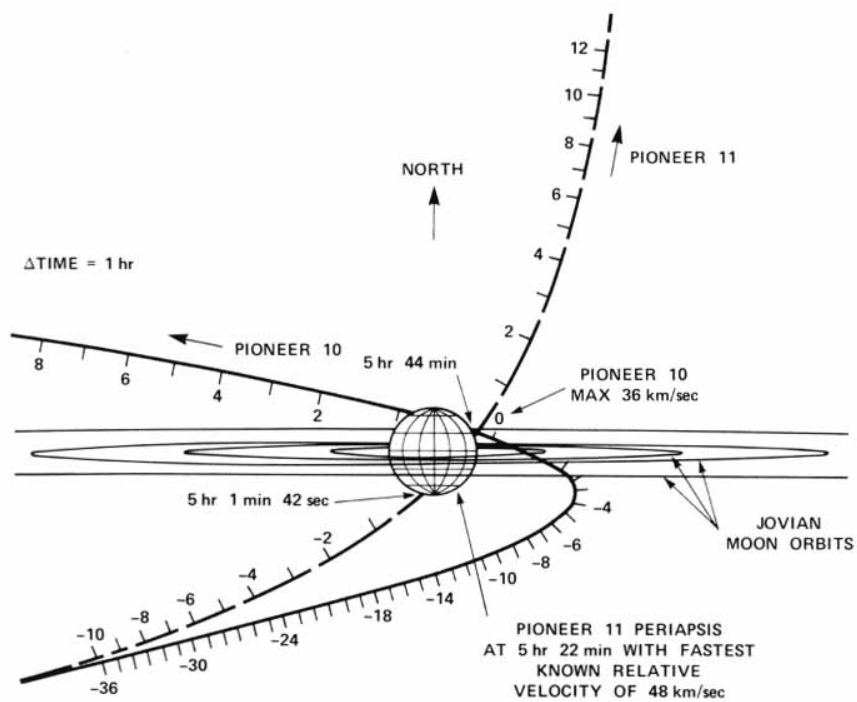


FIGURE 2.2 – Trajectoires de capture des sondes Pioneer 10 et 11 dans le système solaire vues par la tranche de l'écliptique (Crédits : NASA).

## 2.2 L'anomalie d'accélération

Les sondes Pioneer ont permis de faire plusieurs tests de mécanique céleste depuis leur envoi dans l'espace. Ceci est principalement dû aux nombreux équipements sophistiqués de la sonde : leur contrôleur d'altitude (stabilisation de rotation avec un nombre minimum de poussée des propulseurs pour la stabilisation), l'efficacité du module de service (contribuant également à la stabilité de la sonde et réduisant les effets thermiques appliqués à la sonde) et enfin, une télémétrie Doppler de précision accrue (de l'ordre du mHz).

Les données précises analysées furent d'abord utilisées pour résoudre l'énigme des "trans-neptuniens", c'est à dire afin d'explorer les objets situés après l'orbite de Neptune. A l'occasion de ces mesures et des relevés obtenus, les ingénieurs se sont rendus compte de la présence d'une très faible accélération des sondes de l'ordre de  $\sim 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$ . Comme l'ont aussi indiqué les données radiométriques reçues des distances héliocentriques (20 à 70 AU), la précision des modèles permettant la reconstruction de leur trajectoire conduit à un faible décalage Doppler.

Il aura fallu un certains temps pour écarter certaines causes d'accélération connues comme celle de la pression de radiation due au Soleil pour appréhender cette accélération.

Le décalage "blue-shift" a une variation uniforme de l'ordre d'une constante estimée à  $(5.99 \pm 0.01) \times 10^{-9} \text{ Hz.s}^{-1}$  qui peut-être également interprétée comme la constante d'accélération Pioneer que l'on notera [4]  $a_p = (8.74 \pm 1.33) \times 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$ . - Notons également qu'il est possible de mesurer cette accélération spatiale comme une décélération temporelle que l'on notera [3]  $a_t = (2.92 \pm 0.44) \times 10^{-18} \text{ m.s}^{-2}$

Malgré les propriétés assez bien connues de cette accélération constante [5], son origine reste encore inconnue à ce jour.

## 2.3 Origines de l'anomalie

### 2.3.1 Les causes écartées

Depuis la découverte du phénomène, de nombreuses causes ont été avancées pour tenter d'expliquer cette accélération constante  $a_p$ . Plusieurs articles ont été publiés en explorant toutes les causes possibles.

On a avancé l'hypothèse de la cause de la pression de radiation solaire, des effets du vent solaire et de l'effet de l'activité de la couronne solaire sur la propagation des ondes radios. Les influences de la gravité de la ceinture de Kuiper, celle de la galaxie et l'intervention des forces électromagnétiques de Lorentz ont été aussi évoquées. Si l'anomalie des mesures provenait des équipements terrestres, l'analyse a également évalué la contribution des équipements mécaniques dus aux antennes du centre de contrôle de la sonde. Il a été prouvé qu'aucune de ces causes n'expliquait le comportement du signal détecté.

Dans un second temps, on a pris en compte l'intervention de la poussée de la sonde, grâce à la troisième loi de Newton (le principe d'action-réaction), par l'émission d'ondes radio ainsi que la poussée des rejets thermiques de la sonde. Ces causes potentielles font partie des plus probables pour l'explication de cette anomalie mais elles ne sont toujours pas significatives de la valeur de  $a_p$ .

Enfin, il a été pris en compte toutes les incertitudes d'analyses de données et de modélisation de la mission et ceux de la couronne solaire qui se sont, eux aussi, révélés non significatives.

### 2.3.2 Les recherches actuelles

L'étude de données par l'intermédiaire d'autres sondes aurait pu permettre d'avoir des informations supplémentaires sur l'origine de cette anomalie. Cependant, la majorité des autres sondes et missions scientifiques embarquées nécessitent un système de navigation dont la précision est inférieure à l'ordre de grandeur  $\sim 10^{-10} m.s^{-2}$  (les objectifs des missions sont bien évidemment différents d'une mission à l'autre).

Actuellement, les recherches sont portées sur les lois de la physique et de la mécanique gravitationnelle. En effet, les mécanismes physiques propre à la sonde ont été écartés car non-significatifs comme nous l'avons vu précédemment.

L'expansion de l'Univers a été un domaine dans lequel les recherches se sont portées pour la grande majorité. En effet, la coïncidence assez frappante du calcul  $a_p \simeq cH_0$ , avec  $c$  la vitesse de la lumière et  $H_0$  la constante de Hubble, laissait penser à une relation directe avec la dynamique de l'Univers. Cependant, un tel mécanisme conduisait à un effet opposé en signe [4], donc abandonné.

Les nouvelles recherches se sont concentrées principalement sur la physique MOND (Modified Newtonian Dynamics), la théorie gravitationnelle non-symétrique, l'intervention de la matière noire, les théories des branes à dimensions multiples, la modification du potentiel de Yukawa au potentiel newtonien ...

Enfin, le domaine qui est le sujet d'étude du rapport est celui de la modification des équations de champs d'Einstein dans une métrique gravitationnelle (celle de Schwarzschild).

## Chapitre 3

# L'utilité de la relativité générale

La mécanique céleste englobe plusieurs domaines de la physique dont celui de la mécanique de Newton, mécanique de base de la dynamiques d'objets se mouvant dans l'espace. Pour obtenir les théories les plus récentes du  $XX^{eme}$  siècle, la relativité restreinte et la relativité générale vont compléter la théorie newtonienne pour décrire de façon plus précise ce qui se passe en réalité (confirmation de phénomènes comme l'expansion de l'univers, les ondes gravitationnelles, l'étude des trous noirs, ...).

Formulée par Einstein dès 1907, il s'attelle à l'élaboration d'une telle théorie accompagné des mathématiciens Marcel Grossmann et David Hilbert lui permettant de clarifier sa théorie d'un point de vue purement mathématique. La relativité générale a permis de concilier deux théories importantes, celle de la gravitation newtonienne et celle de la relativité restreinte (basée sur la simultanéité des évènements).

Pour simplifier radicalement la relativité générale et son idée principale, retenons juste que la gravitation n'est plus vue comme une "force" à proprement parler, mais comme une conséquence directe de la courbure de l'espace-temps. Nous verrons par la suite dans la partie "Notions de relativité générale" que chacun des termes employés ici a une définition mathématique propre qu'il sera nécessaire de maîtriser avant de commencer à comprendre l'article qui nous intéresse.

Nous devons nous servir de cette théorie pour étudier l'article et, de façon plus générale, l'anomalie Pioneer parce qu'elle évolue dans un espace-temps régi par les lois physiques de la relativité générale qui permettrait d'effectuer des calculs très précis, nécessaires pour appréhender une accélération de l'ordre de grandeur de  $a_p$ .

## Deuxième partie

# Notions de relativité générale

# Chapitre 4

## Bases et généralités

La relativité générale est décrite pour un espace-temps que l'on doit expliciter (un espace-temps courbe à fortiori). Nous détaillerons dans un premier temps les propriétés remarquables de la géométrie d'un espace-temps plat et les propriétés fondamentales qui nous intéressent pour l'analyse de l'article.

### 4.1 L'espace-temps courbe

#### 4.1.1 L'espace-temps

L'espace-temps est défini par les réunions de tous les évènements possibles. Une description continue de l'espace-temps permet de définir une topologie homéomorphe à  $\mathbb{R}^4$  (l'homéomorphisme est la notion mathématique qui permet de dire que deux espaces topologiques sont "le même" vu différemment). On définit ainsi l'espace-temps comme une variété topologique<sup>1</sup>.

#### 4.1.2 La métrique

Chaque type d'espace-temps est défini par une métrique qui lui est propre. D'un point de vue mathématique, une métrique est une fonction qui définit une distance entre les différents éléments présents dans un ensemble. Elle induit par conséquent une topologie sur cet ensemble. Le domaine de la géométrie différentielle est présent en relativité générale et la métrique désigne dans ce cas une structure définie sur un espace vectoriel qualifié de tenseur métrique.

Pour définir une métrique, nous avons besoin de définir un vecteur que l'on appellera un quadrivecteur-vitesse c'est à dire qu'il est de la forme  $\vec{v} = OP$  avec  $O$  l'origine d'un repère orthogonal constitué d'une base orthonormale droite de vecteurs unitaires  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  et  $\vec{e}_4$ .

Dès lors, la base  $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$  avec  $\vec{v} = e_0$  est appelée base orthonormée (ON) d'espace-temps.

Un vecteur  $\vec{w}$  appartenant à cette base par rapport aux vecteurs de base  $e_\alpha$  s'écrira grâce à ses composantes :

$$\vec{w} = w^0 \vec{e}_0 + w^1 \vec{e}_1 + w^2 \vec{e}_2 + w^3 \vec{e}_3 \tag{4.1}$$

---

1. La variété est une appellation mathématique. Si chaque point d'un espace définit comme *lisse* (c'est à dire un ensemble muni d'un ensemble de fonctions et de courbes, tel l'espace-temps) est contenu dans une carte à  $n$  dimensions, alors cet espace est appelé *variété* à  $n$  dimensions.

En utilisant la convention d'Einstein, comme dans tout le rapport, nous effectuons donc automatiquement la somme sur les indices répétés une fois en haut et une fois en bas. Dès lors, la formule précédente devient :

$$\vec{w} = \sum_{\alpha} w^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} = w^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \quad (4.2)$$

Dès lors, si on définit une forme quadratique indéfinie  $g$  dans notre espace vectoriel de travail telle que  $g(\vec{e}_0, \vec{e}_0) = 1$ ,  $g(\vec{e}_0, \vec{e}_i) = 0$  et  $g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = -1$  seulement si  $i = j$  alors en définissant  $g(\vec{e}_{\alpha}, \vec{e}_{\beta}) = \eta_{\alpha\beta}$ , on peut écrire sous forme matricielle :

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

On définit ainsi la métrique de n'importe quel espace-temps par :

$$g(\vec{e}_{\alpha}, \vec{e}_{\beta}) = \eta_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \quad (4.4)$$

### 4.1.3 La métrique de Minkowski

Définit la métrique d'un espace-temps plat utilisé dans le cadre de la relativité restreinte. Pour un espace-temps plat de coordonnées cartésiennes  $(t, x, y, z)$  avec une coordonnée temporelle  $t$  et trois autres coordonnées spatiales  $x, y, z$ .

Nous utiliserons une pseudo-métrique notée  $\Delta s$ , c'est à dire la distance entre deux points dans cet espace tel que :

$$\Delta s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (4.5)$$

La pseudo-métrique est donc équivalente à l'intervalle d'espace-temps qui est l'invariant relativiste par changement de référentiel galiléen en relativité restreinte.

Comme cet espace-temps est un espace affine de dimension 4, il est doté d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénéré lui permettant de définir une forme quadratique (que l'on peut apparenter à un produit scalaire dans cet espace. La matrice associée à cette forme bilinéaire se nomme tenseur de métrique  $g$  :

$$g_{ab} = \nabla_a t \nabla_b t - \nabla_a x \nabla_b x - \nabla_a y \nabla_b y - \nabla_a z \nabla_b z \quad (4.6)$$

ce qui peut s'écrire de manière équivalente sous la forme :

$$g = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (4.7)$$

On dit que la métrique a une signature  $(+1, -1, -1, -1)$  soit encore  $(+ - - -)$ .

Dès lors, si on définit les coordonnées par les lettres indicées  $x^{\mu}$  (pour  $\mu = 0, 1, 2$  ou  $3$ ) alors on peut écrire dans l'espace-temps de Minkowski la propriété suivante :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (4.8)$$

#### 4.1.4 Le cône de lumière

Le cône de lumière est un objet physique fondamentale en relativité restreinte. Il consiste à expliciter les relations entre présent, passé et futur dans le cadre de cette théorie. Les notions données rapidement ci-dessous permettront au lecteur de comprendre certaines annotations lors des calculs qui suivront pour les démonstrations des équations de l'article.

Pour un évènement  $O$  de l'espace-temps, on notera  $N(O)$  le contour du cône de lumière pour lequel on a l'intervalle d'espace-temps nulle  $\Delta s^2 = 0$ . Cela signifie que les informations peuvent joindre les évènements situés sur le bord du cône que pour une vitesse  $c$  en vertu des lois de la relativité restreinte.

Si  $P$  est un point de l'espace-temps situé à l'intérieur du cône, alors  $\vec{OP}$  est de genre temps. Si  $P$  est dans le futur de  $O$  alors  $OP$  pointe vers le futur (idem pour le passé). Les informations vont donc à une vitesse inférieure à  $c$  dans ce cas.

Enfin, si  $P$  n'est ni nul ni de genre temps, alors  $\vec{OP}$  est de genre espace et les informations doivent aller à une vitesse supérieure à  $c$  ce qui n'est évidemment pas réalisable.

La figure 4.1 permet de résumer les précédents affirmations.

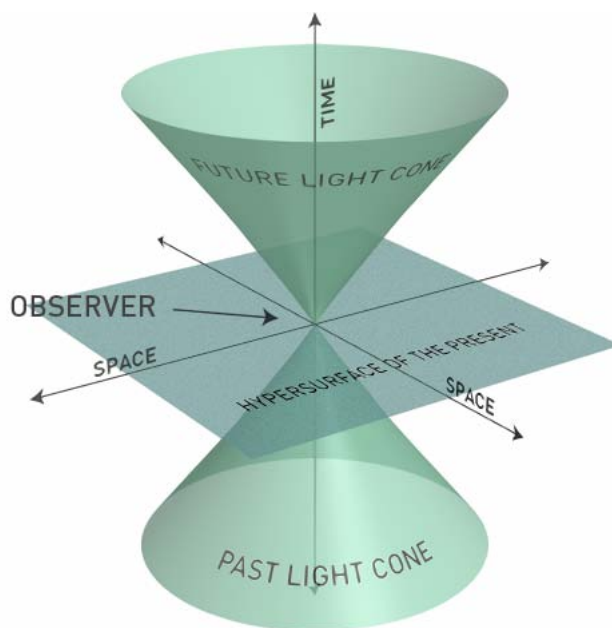


FIGURE 4.1 – Illustration du cône de lumière (Crédits : lightconecorp.com).

## 4.2 Métrique de Schwarzschild

La géométrie de Schwarzschild et, par extension, sa métrique, est une solution des équations d'Einstein. Elle décrit la réalité du tissu spatio-temporel lorsqu'elle est déformée par un champ gravitationnel dû à la présence d'une masse à géométrie sphérique, non chargée et entourée de vide.

Dans ce rapport, il s'agira de détailler les caractéristiques de cette métrique pour l'étude de l'article. Nous détaillerons l'expression de sa métrique et les calculs effectués pour y parvenir



dans la troisième partie du rapport.

## 4.3 Outils mathématiques

### 4.3.1 Repérage dans un espace vectoriel

Lors de notre étude, nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein qui prend pour acquis que le signe somme  $\Sigma$  relatif à un indice est sous-entendu si l'on répète l'indice en haut et en bas, dans un même monôme tel que :

$$A_\mu B^\lambda = A_1 B^1 + A_2 B^2 + \dots + A_n B^n \quad (4.9)$$

Ce qui nous permet également de définir les composantes covariantes du vecteur  $A$  que l'on notera  $A^\mu$  et les composantes contravariantes de ce même vecteur notées  $A_\mu$ .

### 4.3.2 La dérivée covariante

Lors d'un changement de repère, les composantes contravariantes d'un vecteur  $A$  se trouvent bien évidemment modifiées. Dès lors, pour un accroissement  $dA$  du vecteur  $A$  du au changement de repère. La quantité mathématique qui traduit cet accroissement se nomme la *dérivée covariante* et se note de la façon suivante :

$$\nabla_\rho A^\mu \quad (4.10)$$

Mathématiquement, la dérivée covariante ou connexion est un outil qui permet d'obtenir la dérivée d'un champ vectoriel sur une variété (la variété est un espace topologique abstrait), c'est à dire "sur" un espace-temps (défini comme une variété).

Il s'agit d'une extension aux propriétés des tenseurs gradient. Il est important également de se munir de la condition de Leibniz (c'est à dire qui ne subit pas de torsion :  $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$ ) et qui élimine la métrique tel que  $\nabla_c g_{ab} = 0$ .

### 4.3.3 Crochet de Lie

Les dérivées de Lie sont des dérivées mathématiques qui agissent sur des champs de tenseurs. Les crochets de Lie, quant à eux, forment une expression qui fait intervenir ces mêmes dérivées de Lie.

Le crochet de Lie de deux champs vectoriels  $v$  et  $w$  appliqué à une fonction  $f$  s'écrit par définition :

$$[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)) \quad (4.11)$$

Soit, comme nous avons  $v(f) = v^\alpha \nabla_\alpha f$  :

$$[v, w](x^\alpha) = v(w^\alpha) - w(v^\alpha) = v^\beta \nabla_\beta w^\alpha - v^\alpha \nabla_\alpha w^\beta \quad (4.12)$$

Enfin, on peut définir la dérivée de Lie à partir de ses crochets grâce à la définition suivante :

$$L_v = [v, w] \quad (4.13)$$

#### 4.3.4 Les symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel  $\Gamma_{kl}^i$  représentent l'évolution des vecteurs de base du repère géométrique considéré à travers leur dérivée covariante. Ils s'expriment par l'intermédiaire du tenseur de métrique  $g$  par l'expression suivante :

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}) \quad (4.14)$$

soit encore

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{kl}) \quad (4.15)$$

Cette définition provient du fait que la métrique est bien conservée localement (i.e.  $\nabla_{e_\alpha} \vec{g}_{ik} = 0$ ).

#### 4.3.5 Les tenseurs

Les tenseurs sont des objets mathématiques utilisés dans les domaines de l'algèbre multilinéaire et de la géométrie différentielle. En relativité générale, nous utiliserons plutôt des champs de tenseurs qui sont des champs définis sur une variété (i.e l'espace-temps dans notre cas) et qui permettent de définir un tenseur en chaque point de la variété considérée. Dans ce rapport, nous détaillerons les principaux tenseurs utilisés et nécessaires à la compréhension de l'article.

##### Le tenseur de courbure

Le tenseur de courbure est responsable de la description mathématique du champ gravitationnel de l'espace-temps et s'écrit :

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha v^\beta = \nabla_\mu \nabla_\nu v^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu v^\alpha \quad (4.16)$$

Le tenseur duquel il est issu est le tenseur de Riemann pour lequel le crochet de Lie est nul (c'est à dire  $[\mu, \nu] = 0$ ). Le tenseur de Riemann s'écrit par définition :

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha v^\beta = \nabla_\mu \nabla_\nu v^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu v^\alpha - \nabla_{[\mu, \nu]} v^\alpha \quad (4.17)$$

Parmi ces propriétés importantes pour notre étude, on notera qu'il s'agit bien là d'un tenseur de type  $\binom{1}{3}$  antisymétrique sur ses deux derniers indices tel que  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha = -R_{\beta\nu\mu}^\alpha$ .

De plus, l'application du tenseur de métrique  $g$  en mode covariant a pour effet d'abaisser les indices sélectionnés tel que  $g_{\alpha\sigma} R_{\beta\mu\nu}^\sigma = R_{\alpha\beta\mu\nu}$

Il sera indispensable également de connaître l'expression du tenseur de Riemann en fonction des symboles de Christoffel :

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma \quad (4.18)$$

## Le tenseur de Ricci

Le tenseur de Ricci est défini comme un tenseur du type  $\binom{0}{2}$  obtenu par simple contraction du premier et troisième indice du tenseur de Riemann tel que :

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\sigma\beta}^{\sigma} \quad (4.19)$$

L'expression du tenseur de Ricci en fonction des symboles de Christoffel s'écrit donc :

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\sigma\beta}^{\sigma} = \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} \quad (4.20)$$

Contrairement au tenseur de Riemann, le tenseur de Ricci possède une forme bilinéaire symétrique tel que  $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$ .

## Scalaire de courbure

Le scalaire de courbure  $R$  se définit trivialement de la façon suivante :

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \quad (4.21)$$

## Tenseur d'Einstein

Le tenseur d'Einstein peut se retrouver par une simple démonstration utilisant l'identité de Bianchi modifiée suivante :

$$\nabla_{\gamma}R_{\alpha\mu\beta\delta} + \nabla_{\delta}R_{\alpha\mu\gamma\beta} + \nabla_{\beta}R_{\alpha\mu\delta\gamma} = 0 \quad (4.22)$$

Dès lors, en élevant l'indice  $\gamma$  que l'on renomme  $\alpha$  et en élevant également  $\delta$  en l'appelant  $\mu$ , on obtient l'équation :

$$\nabla^{\alpha}R_{\alpha\mu\beta}^{\mu} + \nabla^{\mu}R_{\alpha\mu\beta}^{\alpha} + \nabla_{\beta}R_{\alpha\mu}^{\mu\alpha} = 0 \quad (4.23)$$

Cependant, on peut écrire que  $R_{\alpha\mu\beta}^{\mu} = R_{\alpha\beta}$ ,  $\nabla^{\mu}R_{\alpha\mu\beta}^{\alpha} = \nabla^{\alpha}R_{\alpha\mu\beta}^{\mu}$  et  $\nabla_{\beta}R_{\alpha\mu}^{\mu\alpha} = -\nabla_{\beta}R$ .

Nous noterons également que  $R = g^{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$  et que  $\nabla^{\alpha} = g^{\alpha\sigma}\nabla_{\sigma}$  ce qui nous permettra d'écrire sans encombre :

$$2\nabla^{\alpha}R_{\alpha\beta} - \nabla_{\beta}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.24)$$

soit encore, en vertu du fait que  $\nabla_{\beta}g^{\alpha\beta} = \nabla^{\alpha}R_{\alpha\beta}$  :

$$2\nabla^{\alpha}(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}) = 0 \quad (4.25)$$

Ce qui nous permet d'introduire le tenseur d'Einstein  $G_{\alpha\beta}$  qui s'écrit donc :

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} \quad (4.26)$$

## Tenseur d'énergie-impulsion

Le tenseur d'énergie impulsion  $T_{\alpha\beta}$  est le tenseur responsable de la description du contenu en matière de l'espace-temps. Il s'agit également d'un tenseur bilinéaire symétrique. Nous nous en servirons plus explicitement lorsque l'on évoquera l'équation d'Einstein.

## Chapitre 5

# Equations fondamentales

Avant de terminer avec les bases de la relativité générale nécessaires à l'étude de l'article, nous expliciterons les équations fondamentales de la relativité générale permettant de relier tout ce que nous avons vu auparavant.

### 5.1 Equation d'Einstein

L'équation d'Einstein relie le tenseur d'Einstein  $\mathbf{G}$  au tenseur d'énergie-impulsion  $\mathbf{T}$  avec l'intervention de la constante cosmologique  $\Lambda$  :

$$\mathbf{G} - \Lambda \mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T} \quad (5.1)$$

soit en utilisant l'expression du tenseur d'Einstein :

$$\mathbf{R} - \frac{1}{2} R \mathbf{g} - \Lambda \mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T} \quad (5.2)$$

avec  $G$  la constante de gravitation de Newton,  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide prise par convention  $c = 1$  pour pouvoir écrire cette équation<sup>1</sup> et  $\Lambda$  la constante cosmologique<sup>2</sup>.

### 5.2 Equation de la géodésique

En prenant en compte le principe d'équivalence (qui stipule que tous les corps tombent à la même vitesse en conséquence de l'égalité entre masse grave et masse inerte) dans la théorie de la relativité générale, on explique ainsi la gravité par une courbure de l'espace-temps en vertu de l'équation d'Einstein.

Dès lors, les particules tests se mouvant dans un espace-temps courbe (géométrie de Schwarzschild) se déplacent sur des lignes d'univers qui sont appelées géodésiques. Les géodésiques correspondent aux lignes de plus courte distance entre deux points dans une métrique

---

1. Dans le cas où  $c \neq 1$ , l'équation s'écrit :  $\mathbf{R} - \frac{1}{2} R \mathbf{g} + \Lambda \mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}$ .

2. La constante cosmologique est un paramètre rajouté par Einstein lors de l'établissement de son équation en février 1917 pour rendre sa théorie compatible avec l'idée d'un Univers statique. Qualifié comme la "plus grande bêtise de sa vie", elle est actuellement utilisée dans les nombreux modèles de cosmologie et devrait jouer une place cruciale dans l'explication de l'anomalie Pioneer si l'on suit le raisonnement des auteurs

définie positive (i.e. de signature  $(+++)$ )<sup>3</sup>.

On distingue plusieurs types de géodésiques :

- les géodésiques du genre espace qui minimisent les distances entre deux points.
- les géodésiques du genre lumière c'est à dire de longueur nulle.
- les géodésiques du genre temps qui maximisent la distance entre deux points.

Enfin, après une démonstration que l'on détaillera en troisième partie, nous devons trouver l'équation d'une géodésique dans un espace-temps de Schwarzschild sous la forme suivante :

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \tag{5.3}$$

---

3. La démonstration complète sera faite dans la troisième partie d'analyse de l'article en utilisant le formalisme de Lagrange

## Troisième partie

# Solution des équations de la géodésique dans un espace-temps de Schwarzschild

# Chapitre 6

## Equation de la géodésique

La première étape fut de retrouver l'équation de la géodésique dans un espace-temps de Schwarzschild-(anti) de Sitter<sup>1</sup>.

### 6.1 Démonstration de l'équation de la géodésique

#### 6.1.1 Formalisme de Lagrange

Nous avons décidé de prouver cette équation en utilisant un formalisme assez simple de Lagrange. Nous considérons une métrique positive (+ + +) pour cette démonstration.

Nous nous demandons ensuite quelle trajectoire définie par  $x_i(\tau)$  minimise l'intégrale de longueur

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x_i, \dot{x}_i) d\tau \quad (6.1)$$

avec  $L$  le lagrangien de la particule considérée.

Nous considérons également l'action du lagrangien<sup>2</sup> qui se définit comme suit :

$$s[x] = \int L[x(s)] d^n s \quad (6.2)$$

De plus, pour deux trajectoires voisines séparées par un écart infinitésimal  $\epsilon$  tel que  $x'(\tau) = x(\tau) + \epsilon\zeta(\tau)$ . Dès lors, il nous est possible d'effectuer un développement limité du lagrangien au voisinage de  $\epsilon$  ce qui nous donne :

$$s(\epsilon) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( L(x_i, \dot{x}_i) + \epsilon\zeta(\tau) \frac{\partial L}{\partial x_i} + \epsilon\dot{\zeta}(\tau) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + o(\epsilon) \right) d\tau \quad (6.3)$$

L'équation est bien minimale pour une valeur de  $\epsilon$  nulle. En supposant  $\zeta$  nulle aux bornes de l'intégrale, nous obtenons l'équation :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \zeta(\tau) \frac{\partial L}{\partial x_i} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{\zeta}(\tau) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} d\tau = 0 \quad (6.4)$$

---

1. Un espace-temps à géométrie de Schwarzschild-(anti) de Sitter correspond à la prise en compte d'une constante cosmologique  $\Lambda < 0$  contrairement à un espace-temps de géométrie Schwarzschild-de Sitter avec  $\Lambda > 0$

2. Le lagrangien s'écrit en effectuant la différence entre énergie cinétique et énergie potentielle :  $L = U - E_C$

Après une intégration par partie du deuxième terme de l'équation, nous obtenons l'équation :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \zeta(\tau) \frac{\partial L}{\partial x_i} - \zeta(\tau) \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) d\tau = 0 \quad (6.5)$$

Nous obtenons donc bien la seconde équation fondamentale du formalisme de lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (6.6)$$

### 6.1.2 Formalisme relativiste

Pour une métrique donnée bien définie, la longueur d'une courbe infinitésimale s'écrit, dans un système de coordonnées en  $x^i$ , de la façon suivante :

$$ds = \sqrt{\pm g_{ij} dx^i dx^j} \quad (6.7)$$

Notons que le signe du tenseur de métrique  $g_{ij}$  est donné en fonction de la signature de la métrique de l'espace que l'on considère.

Dès lors, dans le cas où la courbe est paramétrée par une variable  $\tau$ , l'expression modifiée s'écrit :

$$ds = \sqrt{\pm g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} d\tau \quad (6.8)$$

Le lagrangien pourra donc être apparenté à l'expression de la longueur totale de la trajectoire de la particule  $L = \int dl$ . On écrit donc :

$$\dot{s} = \frac{ds}{d\tau} = \sqrt{\pm g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \quad (6.9)$$

que l'on injecte dans la seconde équation du formalisme de lagrange pour obtenir :

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial x_i} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (6.10)$$

En partant du principe que les indices  $i, j$  et  $k$  sont muets, le premier membre de l'équation nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial x_i} = \frac{1}{2\dot{s}} \partial_k g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (6.11)$$

et le second membre de l'équation nous donne :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2\dot{s}} \left( g_{ik} \dot{x}^j + g_{ik} \dot{x}^i \right) = \frac{1}{\dot{s}} \left( g_{ik} \dot{x}^i \right) \quad (6.12)$$

donc l'équation de lagrange devient finalement :

$$\frac{1}{2\dot{s}} \partial_k g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\dot{s}} g_{ik} \dot{x}^i \right) = 0 \quad (6.13)$$



Puis nous décidons de paramétrer la trajectoire par sa longueur  $s$  ce qui entraîne  $\dot{s} = 1$ . Et comme le tenseur de la métrique ne dépend pas explicitement de  $\dot{x}^i$  alors on peut écrire  $\frac{g_{ki}}{ds} = \partial_j g_{ki} \frac{dx^j}{ds}$  ce qui nous donne :

$$\frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - \partial_j g_{ki} \dot{x}^i \dot{x}^j - g_{ki} \ddot{x}^i = 0 \quad (6.14)$$

soit encore :

$$\ddot{x}^i = g^{ki} \left( \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ki} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (6.15)$$

En utilisant les propriétés des symboles de Christoffel appliquées au tenseur de métrique  $g$  (après symétrisation des termes), on retrouve donc l'équation de la géodésique :

$$\ddot{x}^k = -\Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (6.16)$$

On retrouve donc bien l'équation de la géodésique de l'article en remplaçant les indices  $k = \mu, i = \rho, j = \sigma$  et en prenant en compte la géométrie de Schwarzschild de signature<sup>3</sup>  $(+ - - -)$  (ou  $(- + + +)$ ) pour obtenir la même équation que celle de l'article :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \quad (6.17)$$

avec le symbole de Christoffel noté d'une autre manière :

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\rho g_{\sigma\nu} + \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\sigma}) \quad (6.18)$$

Nous allons pouvoir désormais démontrer l'expression très importante de la métrique de l'espace-temps pour une métrique de Schwarzschild.

## 6.2 Etablissement de la métrique de Schwarzschild

Nous allons désormais expliciter la mise en place de l'expression de la métrique pour une géométrie de Schwarzschild, c'est à dire la métrique pour un espace-temps courbé par une masse sphérique.

Dans les parties précédentes (notamment celle évoquant la métrique dans un espace-temps donné), nous avons pu donner une définition assez générale de la métrique que nous allons de nouveau utiliser :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.19)$$

Avant d'aller plus loin, évoquons les propriétés dues à la géométrie de Schwarzschild, essentielles pour nous permettre d'établir l'expression de sa métrique.

---

3. Elle agit sur le symbole de Christoffel pour changer son signe

### 6.2.1 Les approximations de la métrique de Schwarzschild

Nous nous placerons dans un système de coordonnées sphériques comme le lecteur pourra s'en douter. Dès lors, nous utiliserons le système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  avec les conditions suivantes :

- $t \in \mathbb{R}$
- $r \in \mathbb{R}^+$
- $\theta \in [0, \pi]$
- $\varphi \in [0, 2\pi]$

Insérer figure

Puis ajoutons trois autres conditions indispensables :

- une symétrie sphérique (ou isotrope) qui implique que toutes les composantes de la métrique sont inchangées lors d'une rotation  $\theta \rightarrow -\theta$  ou  $\varphi \rightarrow -\varphi$ .
- un espace-temps statique impliquant une dépendance en temps nulle pour les composantes de la métrique (i.e.  $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$ ).
- un espace-temps non-chargé et vide à l'extérieur du corps central qui courbe l'espace-temps. La solution dans le vide se définira par l'intermédiaire du tenseur d'énergie-impulsion tel que  $T_{\mu\nu} = 0$  en dehors du corps central. En vertu de l'équation d'Einstein avec une constante cosmologique  $\Lambda = 0$ , on obtient donc la condition cruciale :

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{6.20}$$

### 6.2.2 Diagonalisation de la métrique

Un espace temps statique permet de faire certaines approximations telles que  $(t, r, \theta, \varphi) \rightarrow (-t, r, \theta, \varphi)$  ne doit pas changer la métrique. On peut donc écrire sans crainte  $g'_{\mu t} = -g_{\mu t}$  ce qui nous donne pour unique solution :

$$g_{\mu\nu} = 0 \ (\mu \neq \nu) \tag{6.21}$$

Dès lors, il nous est à présent possible de donner la forme de l'expression de cette métrique à l'aide des éléments diagonaux de la matrice de la métrique  $g$  de signature  $(-+++)$  c'est à dire :

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 - g_{rr}dr^2 - g_{\theta\theta}d\theta^2 - g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 \tag{6.22}$$

Ces quatre composantes sont bien indépendantes du temps donc  $g_{xx}(r, t) \rightarrow g_{xx}(r)$ .

Par simple souci de commodité, nous renommerons les composantes de la métrique :

$$g_{rr} = A(r) \text{ et } g_{tt} = B(r) \tag{6.23}$$

Puis, nous savons que, dans le repère sphérique, la rotation sur la surface d'une sphère (d'équation  $ds = rd\theta \sin\theta d\varphi$ ) creuse ( $dr = 0$ ) s'écrit alors :

$$d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{6.24}$$

Puis, en multipliant par la distance radiale au carré  $r_0^2$ , on obtient la distance :

$$dl^2 = r_0^2 d\Omega^2 = r_0^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.25)$$

Comme les composantes de la métrique à cette surface doivent être inchangées par rotation suivant les angles  $\theta$  ou  $\varphi$ , on peut écrire l'expression de  $dl^2$  de façon à faire l'identification suivante :

$$g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 = r_0^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.26)$$

Ce qui implique nécessairement les égalités suivantes  $g_{\theta\theta} = r^2$  et  $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$  (avec  $r_0 = r$  car le même rayon est imposé pour chaque hypersurface).

L'expression de la métrique de Schwarzschild devient donc :

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.27)$$

### 6.2.3 Utilisation de l'équation d'Einstein

Nous utiliserons l'équation d'Einstein dans le vide, qui nous prouve que si le tenseur  $T_{\mu\nu} = 0$  alors nous avons nécessairement  $R_{\mu\nu} = 0$  en faisant abstraction pour le moment de la constante cosmologique  $\Lambda$ .

Nous devons donc calculer les différents tenseurs de Ricci  $R_{tt}, R_{rr}, R_{\theta\theta}$  et  $r_{,\varphi\varphi}$  car le seul moyen d'avoir  $R_{\alpha\beta} \neq 0$  est de poser  $\alpha = \beta$ .

Dès lors, on peut écrire les tenseurs de Ricci en fonction des symboles de Christoffel :

$$R_{\alpha\alpha} = R_{\alpha\sigma\alpha}^{\sigma} = \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\alpha}^{\mu} - \partial_{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\mu}\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} \quad (6.28)$$

Les symboles de Christoffel doivent donc être calculés avant de procéder aux calculs des différents tenseurs de Ricci.

### 6.2.4 Calculs des symboles de Christoffel

On a l'égalité connue suivante :

$$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma}^{\beta} \quad (6.29)$$

expression différente de 0 dans le cas  $\alpha = \beta$  uniquement. Dès lors, nous réécrivons les coefficients de Christoffel avec les composantes diagonales de la matrice du tenseur de métrique  $g$  :

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu}(\partial_{\rho}g_{\sigma\mu} + \partial_{\sigma}g_{\rho\mu} - \partial_{\mu}g_{\sigma\rho}) \quad (6.30)$$

Passons désormais au calcul brutal de ces coefficients pour différents paramètres :

$\mu = t$  D'après l'équation précédente, on obtient :

$$\Gamma_{\rho\sigma}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_{\rho}g_{\sigma t} + \partial_{\sigma}g_{\rho t} - \partial_t g_{\sigma\rho}) \quad (6.31)$$

$\mu = \rho = t$

$$\Gamma_{t\sigma}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_t g_{\sigma t} + \partial_\sigma g_{tt} - \partial_t g_{\sigma t}) \quad (6.32)$$

$\sigma = t$

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_t g_{tt} + \partial_t g_{tt} - \partial_t g_{tt}) \quad (6.33)$$

soit :

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2B(r)}(\partial_t B(r)) = 0 \quad (6.34)$$

$\sigma = r$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_t g_{rt} + \partial_r g_{tt} - \partial_t g_{rt}) \quad (6.35)$$

soit :

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2B(r)}(\partial_r B(r)) \quad (6.36)$$

$\sigma = \theta$

$$\Gamma_{t\theta}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_t g_{\theta t} + \partial_\theta g_{tt} - \partial_t g_{\theta t}) \quad (6.37)$$

soit :

$$\Gamma_{t\theta}^t = \frac{1}{2B(r)}(\partial_\theta B(r)) = 0 \quad (6.38)$$

$\sigma = \varphi$

$$\Gamma_{t\varphi}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_t g_{\varphi t} + \partial_\varphi g_{tt} - \partial_t g_{\varphi t}) \quad (6.39)$$

soit :

$$\Gamma_{t\varphi}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_\varphi g_{tt}) = 0 \quad (6.40)$$

$\rho = r, \theta, \varphi$  On montre de la même manière que, dans ces trois cas, on obtient également :

$$\Gamma_{rr}^t = \Gamma_{r\theta}^t = \Gamma_{r\varphi}^t = 0 \quad (6.41)$$

$\mu = r$  D'après l'équation précédente, on obtient :

$$\Gamma_{\rho\sigma}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\rho g_{\sigma r} + \partial_\sigma g_{\rho r} - \partial_r g_{\sigma\rho}) \quad (6.42)$$

$\rho = t$

$$\Gamma_{t\sigma}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_t g_{\sigma r} + \partial_\sigma g_{tr} - \partial_r g_{\sigma t}) \quad (6.43)$$

soit :

$$\Gamma_{t\sigma}^r = -\frac{1}{2A(r)}(\partial_r g_{\sigma t}) \quad (6.44)$$

dès lors  $\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^r = \Gamma_{t\varphi}^r = 0$  et il nous reste seulement :

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2A(r)}(\partial_r B(r)) \quad (6.45)$$

$\rho = r$

$$\Gamma_{r\sigma}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_r g_{\sigma r} + \partial_\sigma g_{rr} - \partial_r g_{\sigma r}) \quad (6.46)$$

soit :

$$\Gamma_{r\sigma}^r = \frac{1}{2A(r)}(\partial_\sigma A(r)) \quad (6.47)$$

dès lors  $\Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{r\varphi}^r = \Gamma_{rt}^r = 0$  et il nous reste seulement :

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2A(r)}(\partial_r A(r)) \quad (6.48)$$

$\rho = \theta$

$$\Gamma_{\theta\sigma}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\theta g_{\sigma r} + \partial_\sigma g_{\theta r} - \partial_r g_{\sigma\theta}) \quad (6.49)$$

dès lors  $\Gamma_{\theta t}^r = \Gamma_{\theta r}^r = \Gamma_{\theta\varphi}^r = 0$  et il nous reste seulement :

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2A(r)}(\partial_r r^2) = -\frac{r}{A(r)} \quad (6.50)$$

$\rho = \varphi$

$$\Gamma_{\varphi\sigma}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\varphi g_{\sigma r} + \partial_\sigma g_{\varphi r} - \partial_r g_{\sigma\varphi}) \quad (6.51)$$

dès lors  $\Gamma_{\varphi r}^r = \Gamma_{\varphi\theta}^r = 0$  et il nous reste seulement :

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{1}{2A(r)}(\partial_r r^2 \sin^2 \theta) = -\frac{r \sin^2 \theta}{A(r)} \quad (6.52)$$

$\mu = \theta$  D'après l'équation précédente, on obtient :

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\rho g_{\sigma\theta} + \partial_\sigma g_{\rho\theta} - \partial_\theta g_{\sigma\rho}) \quad (6.53)$$

$\rho = t$

$$\Gamma_{t\sigma}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_t g_{\sigma\theta} + \partial_\sigma g_{t\theta} - \partial_\theta g_{\sigma t}) \quad (6.54)$$

dès lors  $\Gamma_{tt}^\theta = \Gamma_{tr}^\theta = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\varphi}^\theta = 0$ .

$\rho = r$

$$\Gamma_{r\sigma}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_r g_{\sigma\theta} + \partial_\sigma g_{r\theta} - \partial_\theta g_{\sigma r}) \quad (6.55)$$

dès lors  $\Gamma_{rt}^\theta = \Gamma_{rr}^\theta = \Gamma_{r\varphi}^\theta = 0$  et il nous reste seulement :

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2r^2}(\partial_r r^2) = \frac{1}{r} \quad (6.56)$$

$\rho = \theta$

$$\Gamma_{\theta\sigma}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\theta g_{\sigma\theta} + \partial_\sigma g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\sigma\theta}) \quad (6.57)$$

alors  $\Gamma_{\theta t}^\theta = \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\varphi}^\theta = 0$  et il nous reste seulement :

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{2r^2}(\partial_r r^2) = \frac{1}{r} \quad (6.58)$$

Notons que l'on remarque bien le côté symétrique du tenseur avec  $\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta$ .

$\rho = \varphi$

$$\Gamma_{\varphi\sigma}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\varphi g_{\sigma\theta} + \partial_\sigma g_{\varphi\theta} - \partial_\theta g_{\sigma\varphi}) \quad (6.59)$$

puis  $\Gamma_{\varphi t}^\theta = \Gamma_{\varphi r}^\theta = \Gamma_{\varphi\theta}^\theta = 0$  et il nous reste seulement :

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\frac{1}{2r^2}(\partial_\theta r^2 \sin^2 \theta) = -\sin \theta \cos \theta \quad (6.60)$$

$\mu = \varphi$  D'après l'équation précédente, on obtient :

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\partial_\rho g_{\sigma\varphi} + \partial_\sigma g_{\rho\varphi} - \partial_\varphi g_{\sigma\rho}) \quad (6.61)$$

$\rho = t$

$$\Gamma_{t\sigma}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\partial_t g_{\sigma\varphi} + \partial_\sigma g_{t\varphi} - \partial_\varphi g_{\sigma t}) \quad (6.62)$$

dès lors  $\Gamma_{tt}^\varphi = \Gamma_{tr}^\varphi = \Gamma_{t\theta}^\varphi = \Gamma_{t\varphi}^\varphi = 0$ .

$\rho = r$

$$\Gamma_{r\sigma}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\partial_r g_{\sigma\varphi} + \partial_\sigma g_{r\varphi} - \partial_\varphi g_{\sigma r}) \quad (6.63)$$

et comme  $\Gamma_{rt}^\varphi = \Gamma_{rr}^\varphi = \Gamma_{r\theta}^\varphi = 0$  et il nous reste seulement :

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(\partial_r r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{r} \quad (6.64)$$

$\rho = \theta$

$$\Gamma_{\theta\sigma}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\partial_\theta g_{\sigma\varphi} + \partial_\sigma g_{\theta\varphi} - \partial_\varphi g_{\sigma\theta}) \quad (6.65)$$

dès lors  $\Gamma_{\theta t}^\varphi = \Gamma_{\theta r}^\varphi = \Gamma_{\theta\theta}^\varphi = 0$  et il nous reste seulement :

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(\partial_\theta r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{\tan \theta} \quad (6.66)$$

$\rho = \text{phi}$

$$\Gamma_{\varphi\sigma}^{\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\partial_{\varphi}g_{\sigma\varphi} + \partial_{\sigma}g_{\varphi\varphi} - \partial_{\varphi}g_{\sigma\varphi}) \quad (6.67)$$

dès lors  $\Gamma_{\varphi t}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} = 0$  et il nous reste seulement deux termes à expliciter :

$$\Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(\partial_r r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{r} \quad (6.68)$$

ainsi que :

$$\Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(\partial_{\theta} r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{\tan \theta} = \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} \quad (6.69)$$

## 6.2.5 Calcul des tenseurs de Ricci

Occupons-nous maintenant du calcul des tenseurs de Ricci pour chaque composante  $t, r, \theta, \varphi$ .

### Composante t

$$R_{tt} = \partial_{\mu}\Gamma_{tt}^{\mu} - \partial_t\Gamma_{t\mu}^{\mu} + \Gamma_{tt}^{\mu}\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - \Gamma_{t\mu}^{\nu}\Gamma_{\nu t}^{\mu} \quad (6.70)$$

Nous devons procéder par identification et rechercher les symboles de Christoffel qui correspondent aux indices covariants et contravariants en fonction des calculs précédents. Ainsi, l'équation précédente s'écrit :

$$R_{tt} = \partial_r\Gamma_{tt}^r + \Gamma_{tt}^r(\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\varphi}^{\varphi}) - [\Gamma_{tr}^r\Gamma_{tt}^r + \Gamma_{tt}^r\Gamma_{rt}^t] \quad (6.71)$$

Notons qu'il n'existe en effet aucun symbole de Christoffel de la forme  $\Gamma_{t\mu}^{\mu}$ .

Ce qui, après le calcul des termes séparés nous donne :

$$R_{tt} = \frac{1}{4A(r)} \left( -2\partial_r^2 B(r) + 2\frac{\partial_r B(r)\partial_r A(r)}{A(r)} \right) - \frac{\partial_r B(r)\partial_r A(r)}{4A^2(r)} - \frac{(\partial_r B(r))^2}{4A(r)B(r)} - \frac{\partial_r B(r)}{rA(r)} + \frac{2\partial_r^2 B(r)}{4A(r)B(r)} \quad (6.72)$$

**Composante r** Nous procéderons de la même façon pour le calcul du tenseur de Ricci pour la composante  $r$ . Nous avons l'équation suivante :

$$R_{rr} = \partial_{\mu}\Gamma_{rr}^{\mu} - \partial_r\Gamma_{r\mu}^{\mu} + \Gamma_{rr}^{\mu}\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - \Gamma_{r\mu}^{\nu}\Gamma_{\nu r}^{\mu} \quad (6.73)$$

soit encore :

$$R_{rr} = \partial_r\Gamma_{rr}^r - \partial_r(\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\varphi}^{\varphi}) + \Gamma_{rr}^r(\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\varphi}^{\varphi}) - [\Gamma_{rr}^r\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{rt}^t\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{r\theta}^{\theta}\Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\varphi}^{\varphi}\Gamma_{r\varphi}^{\varphi}] \quad (6.74)$$

Ce qui, après calcul, nous donne :

$$R_{rr} = \frac{\partial_r^2 A(r)}{2A(r)} - \frac{(\partial_r A(r))^2}{2A^2(r)} - \frac{\partial_r^2 A(r)}{2A(r)} - \frac{\partial_r^2 B(r)}{2B(r)} + \frac{2}{r^2} + \frac{(\partial_r A(r))^2 A^2(r)}{2A^2(r)} + \frac{(\partial_r B(r))^2}{2B^2(r)} + \frac{\partial_r A(r)\partial_r B(r)}{4A(r)B(r)} + \frac{\partial_r^2 A(r)}{4A^2(r)} + \frac{\partial_r A(r)}{rA(r)} - \frac{(\partial_r A(r))^2}{4A^2(r)} - \frac{(\partial_r B(r))^2}{4B^2(r)} - \frac{2}{r^2} \quad (6.75)$$

**Composante  $\theta$**

$$R_{\theta\theta} = \partial_\mu \Gamma_{\theta\theta}^\mu - \partial_\theta \Gamma_{\theta\mu}^\mu + \Gamma_{\theta\theta}^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\nu - \Gamma_{\theta\mu}^\nu \Gamma_{\nu\theta}^\mu \quad (6.76)$$

soit encore :

$$R_{\theta\theta} = \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi + \Gamma_{\theta\theta}^r (\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\varphi}^\varphi) - [\Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi] \quad (6.77)$$

ce qui nous donne après calcul :

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{A(r)} + r \frac{\partial_r A(r)}{A^2(r)} + \frac{1}{\tan^2 \theta \cos^2 \theta} - \frac{r \partial_r B(r)}{2A(r)B(r)} - \frac{r \partial_r A(r)}{2A^2(r)} - \frac{2}{A(r)} - \frac{1}{\tan^2 \theta} + \frac{2}{A(r)} \quad (6.78)$$

**Composante  $\varphi$**

$$R_{\varphi\varphi} = \partial_\mu \Gamma_{\varphi\varphi}^\mu - \partial_\varphi \Gamma_{\varphi\mu}^\mu + \Gamma_{\varphi\varphi}^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\nu - \Gamma_{\varphi\mu}^\nu \Gamma_{\nu\varphi}^\mu \quad (6.79)$$

soit encore :

$$R_{\varphi\varphi} = [\partial_r \Gamma_{\varphi\varphi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta] + [\Gamma_{\varphi\varphi}^r (\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\varphi}^\varphi) + (\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi)] - [\Gamma_{\varphi\varphi}^r \Gamma_{\varphi r}^\varphi + \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta] \quad (6.80)$$

Notons qu'il n'existe en effet aucun symbole de Christoffel de la forme  $\Gamma_{\varphi\mu}^\mu$ .

Après calcul, nous obtenons le résultat suivant :

$$R_{\varphi\varphi} = \frac{\sin^2 \theta}{A^2(r)} (\partial_r A(r)r - A(r)) - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta \left( \frac{\partial_r B(r)r}{2B(r)A(r)} + \frac{\partial_r A(r)r}{2A^2(r)} + \frac{2}{A(r)} \right) - \cos^2 \theta + 2 \left( \frac{\sin^2 \theta}{A(r)} + \cos^2 \theta \right) \quad (6.81)$$

**Récapitulatif** Après simplification des calculs et de la notation, nous obtenons finalement les équations suivantes pour chaque composante  $t, r, \theta$  et  $\varphi$  :

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'A'}{4A^2} + \frac{(B')^2}{4AB} - \frac{B'}{rA} \quad (6.82)$$

$$R_{rr} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'A'}{4AB} + \frac{(B')^2}{4B^2} + \frac{A'}{rA} \quad (6.83)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{A} + \frac{rA'}{2A^2} - \frac{rB'}{2AB} + 1 \quad (6.84)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta \left( -\frac{1}{A} + \frac{rA'}{2A^2} - \frac{rB'}{2AB} + 1 \right) \quad (6.85)$$



On remarque également que  $R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}$ . Nous avons donc finalement trois tenseurs de Ricci à considérer dans le calcul suivant :

$$R_{tt} = R_{rr} = R_{\theta\theta} = 0 \quad (6.86)$$

### 6.2.6 Détermination des coefficients $A(r)$ et $B(r)$

En utilisant les équations de  $R_{tt}$  et  $R_{rr}$ , nous pouvons extraire une relation sur  $A(r)$  et  $B(r)$ .

D'après l'équation de  $R_{rr}$ , nous pouvons extraire la dérivée seconde par rapport à  $r$  de  $B(r)$  :

$$B'' = 2B \left[ \frac{B'A'}{4AB} + \frac{(B')^2}{4B^2} + \frac{A'}{Ar} - R_{rr} \right] \quad (6.87)$$

que l'on va injecter dans l'expression de  $R_{tt}$  pour obtenir l'équation suivante :

$$-\frac{B'A'}{4A^2} - \frac{(B')^2}{4AB} - \frac{A'B}{A^2r} + \frac{B'A'}{4A^2} + \frac{(B')^2}{4AB} - \frac{B'}{rA} = 0 \quad (6.88)$$

Impliquant :

$$-\frac{1}{rA} \left( B' + \frac{A'B}{A} \right) = 0 \quad (6.89)$$

d'où la condition  $\frac{B'}{B} = -\frac{A'}{A}$  équivalente à  $\partial_r(AB) = 0$ . Ainsi, nous pouvons écrire l'équation suivante :

$$A(r)B(r) = K \quad (6.90)$$

avec  $K$  une constante appartenant à l'ensemble des réels (i.e.  $K \in \mathbb{R}$ ).

Cependant, il est important de noter que si l'on se place assez loin du lieu de courbure considéré dans l'espace-temps de Schwarzschild, nous retrouvons la métrique de Minkowski (i.e. valable pour un espace-temps plat) pour un rayon très grand (i.e.  $r \rightarrow \infty$ ).

Or, l'expression de la métrique dans un espace-temps à géométrie minkowskienne avec  $c = 1$  comme dans le cas de l'article de Hackmann et Lammerzähl, s'écrit :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (6.91)$$

Par identification, on peut conclure sur la condition suivante aux limites pour la métrique de Schwarzschild :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A(r) = +1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} B(r) = +1 \quad (6.92)$$

Par simple multiplication des limites, nous sommes en mesure de trouver la valeur de cette constante  $K$  égale à 1 :

$$A(r)B(r) = 1 \quad (6.93)$$

### 6.2.7 Equation de Schwarzschild ( $\Lambda = 0$ )

Pour déterminer l'équation de Schwarzschild qui va nous permettre de trouver l'expression exacte de  $A(r)$  (i.e.  $B(r)$ ), utilisons l'expression de  $R_{\theta\theta}$  dans laquelle nous injectons les conditions précédemment obtenues sur les coefficients. Nous obtenons alors :

$$-\frac{1}{A} + \frac{rA'}{2A^2} + 1 + \frac{rA'}{2A^2} = 0 \quad (6.94)$$

nous donnant l'équation de Schwarzschild suivante :

$$rA' = A(1 - A) \quad (6.95)$$

**Résolution de l'équation de Schwarzschild ( $\Lambda = 0$ )** L'équation de Schwarzschild se présente mathématiquement comme une équation à variables séparées :

$$\frac{\partial A(r)}{A(r)(1 - A(r))} = \frac{\partial r}{r} \quad (6.96)$$

Puis, nous pouvons écrire le quotient  $\frac{A(r)}{A(r)(A(r)-1)}$  sous la forme  $\frac{1}{A(r)} + \frac{1}{A(r)-1}$  en utilisant un procédé de décomposition en éléments simples.

En intégrant cette équation nous obtenons donc trivialement :

$$\ln\left(\frac{A(r)}{1 - A(r)}\right) = \ln(r) + C \quad (6.97)$$

avec  $C$  constante appartenant à l'ensemble réel (i.e.  $C \in \mathbb{R}$ ).

soit en utilisant la propriété des fonctions réciproques de l'exponentielle et du logarithme :

$$\frac{A(r)}{1 - A(r)} = Dr \quad (6.98)$$

avec la constante  $D = \exp C$  qui sera déterminée ensuite.

Nous obtenons finalement l'expression finale de  $A(r)$  (et par conséquent de  $B(r)$ ) :

$$A(r) = \left(1 + \frac{1}{Sr}\right)^{-1} \quad (6.99)$$

Ce qui est conforme<sup>4</sup> à toutes les théories mentionnées dans le rapport comme nous le verrons plus loin. Nous pouvons désormais donner une expression plus complète de la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{1}{Sr}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{1}{Sr}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (6.100)$$

---

4. A la différence que notre constante  $S$  devra absolument être négative

**Détermination de la constante  $S$  par approximation du champ faible** Pour déterminer la constante  $S$ , on se place loin du centre de courbure de l'espace-temps c'est à dire là où le champ de gravitation est suffisamment faible pour continuer à faire nos approximations de géométrie minkowskienne.

La métrique minkowskienne décrivant un espace-temps newtonien se définit par l'expression de sa métrique pour une signature  $(+ - - -)$  :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2U(x_i)}{c^2}\right) (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (6.101)$$

avec  $x^0$  coordonnée temporelle,  $x^i$  pour  $i = 1, 2, 3$ , coordonnées galiléennes et  $U$ , le potentiel de gravitation de Newton. Nous nous permettrons d'étendre ce cadre à celui de la relativité générale en précisant ce potentiel  $U$ .

**Détermination du potentiel  $U$**  D'après la loi fondamentale de la dynamique énoncée par Newton, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{GM}{r^2} \quad (6.102)$$

De plus, nous savons qu'une force est dérivée d'un potentiel ce qui entraîne irrémédiablement :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{GM}{r^2} \quad (6.103)$$

Ce qui nous donne l'expression du potentiel newtonien  $U$  recherché :

$$U = -\frac{GM}{r} \quad (6.104)$$

L'expression de la métrique  $g_{tt}$  devient donc :

$$g_{tt} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \quad (6.105)$$

avec  $r_S$  que l'on appellera rayon de Schwarzschild<sup>5</sup> est défini par :

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (6.106)$$

Ceci est équivalent à égaliser notre constante  $S$  telle que :  $S = -\frac{1}{2U}$ . Dès lors, la métrique de Schwarzschild en l'absence de constante cosmologique s'écrit :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.107)$$

---

5. Appelé également horizon des événements, ce rayon définit la distance pour laquelle, la composante  $g_{tt}$  e la métrique tend vers 0 et la composante  $g_{rr}$  devient infinie.

### 6.2.8 Equation de Schwarzschild ( $\Lambda \neq 0$ )

Nous avons négligé cette constante fondamentale au départ pour plus de facilité de calcul. Cependant, sa prise en compte est à la source de la motivation de l'écriture de l'article de Hackmann et Lammerzähl. Sa prise en compte s'avère nécessaire et passionnante pour l'analyse des calculs.

Pour un espace-temps vide (i.e.  $T_{\mu\nu} = 0$ ), l'expression du tenseur de Ricci en vertu de l'équation d'Einstein devient alors :

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (6.108)$$

Ce qui conduit tout naturellement à la modification de l'équation de Schwarzschild suivant l'équation 6.109.

$$-\frac{1}{A} + \frac{rA'}{2A^2} + 1 + \frac{rA'}{2A^2} = \Lambda r^2 \quad (6.109)$$

**Résolution de l'équation de Schwarzschild ( $\Lambda \neq 0$ )** En notant que nous avons  $\frac{A'}{A^2} = -\frac{d}{dr}(A^{-1})$  et en posant l'égalité  $f = A^{-1}$ , nous obtenons l'équation ??

$$rf' - f = \Lambda r^2 - 1 \quad (6.110)$$

que nous allons résoudre grâce à la méthode mathématique de la variation de la constante.

**Equation homogène** L'équation homogène s'écrit sous la forme suivante :

$$rf' - f = 0 \quad (6.111)$$

ce qui entraîne trivialement la solution  $f_H$  suivante :

$$f_H(r) = Ce^{-\ln r} + E \quad (6.112)$$

avec les constantes d'intégration  $E = 0$  aux bornes de l'intégrale et  $C$ , constante à déterminer.

**Variation de la constante** On pose donc  $C \rightarrow C(r)$  ce qui, en injectant dans l'équation mère, nous permet d'obtenir :

$$rC'(r)e^{-\ln r} = \Lambda r^2 - 1 \quad (6.113)$$

Après intégration, ceci nous donne évidemment :

$$C(r) = r - \frac{1}{3}\Lambda r^3 + F \quad (6.114)$$

avec  $F \in \mathbb{R}$  constante d'intégration à déterminer.

Dès lors, la solution finale s'écrit :

$$f(r) = 1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 + G \quad (6.115)$$

avec la constante  $G = \frac{F}{r}$ . Nous choisirons donc évidemment la constante  $F = -r_S$  qui permettra d'obtenir l'expression 6.116.

$$A(r) = \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \quad (6.116)$$

Ainsi, nous obtenons donc bien l'expression de la métrique donnée dans l'article de Hackmann et Lammerzähl :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (6.117)$$

# Chapitre 7

## Potentiel effectif et résolution de l'équation de la géodésique

### 7.1 Considérations géométriques

Nous devons de nouveau préciser le repère dans lequel nous nous plaçons et les approximations qui l'accompagnent. Comme nous sommes dans le cadre d'une géométrie sphérique, on se contente uniquement d'étudier le mouvement d'une particule dans cet espace-temps dans le plan équatorial uniquement impliquant la condition  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi, l'expression de notre métrique devient :

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 - g_{rr}dr^2 - r^2d\varphi^2 \quad (7.1)$$

En divisant l'expression de la métrique par  $ds^2$ , on retrouve une forme rappelant la conservation de l'énergie mécanique totale d'une particule :

$$g_{tt}\frac{dt^2}{ds^2} - g_{rr}\frac{dr^2}{ds^2} - r^2\frac{d\varphi^2}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1 \quad (7.2)$$

### 7.2 Introductions de nouveaux paramètres

Les nouveaux paramètres seront en réalité les quantités  $E$  et  $L^1$  que l'on posera comme suit :

$$E = g_{tt}\frac{dt}{ds} = \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)\frac{dt}{ds} \quad (7.3)$$

$$L = r^2\frac{d\varphi}{ds} \quad (7.4)$$

De plus, comme nous avons l'égalité de normalisation suivante :

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = ds^2 = \epsilon \quad (7.5)$$

---

1. Attention,  $E$  et  $L$  sont définis en tant que *constantes* du mouvement et n'ont pas de réalité physique à proprement parler.

nous pouvons réécrire l'expression de la métrique normalisée sous la forme :

$$g_{tt} \frac{dt^2}{ds^2} - g_{rr} \frac{dr^2}{ds^2} - r^2 \frac{d\varphi^2}{ds^2} = \epsilon \quad (7.6)$$

### 7.3 Expression du potentiel effectif d'une particule dans l'espace-temps de Schwarzschild

Pour établir l'expression du potentiel effectif d'une particule se mouvant dans l'espace-temps de Schwarzschild, revenons à quelques notions de mécanique classique newtonienne pour resituer nos calculs.

Lorsqu'il s'agit d'un mouvement dans le plan équatorial, les composantes du vecteur vitesse s'écrivent :

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} dr \\ r d\theta \end{vmatrix}$$

dès lors, l'expression de sa norme au carré s'écrit <sup>2</sup> :  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$  et en vertu du principe de la conservation de l'énergie mécanique d'un système, nous pouvons écrire :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r} \quad (7.7)$$

avec  $k \in \mathbb{R}$  constante définissant l'énergie potentielle d'un champ gravitationnel (i.e.  $\propto \frac{1}{r}$ ). soit encore :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{k}{r} \quad (7.8)$$

Cependant, d'après l'expression du moment cinétique  $L$ , par définition :

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} \quad (7.9)$$

ce qui conduit tout naturellement dans notre configuration à :

$$L = m r^2 \dot{\theta} \quad (7.10)$$

Alors, l'expression finale de notre énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r) \quad (7.11)$$

avec le potentiel effectif  $V(r)$  d'expression :

$$V(r) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m r^2} - \frac{k}{r} \quad (7.12)$$

Si l'on se permet d'intégrer  $E$ , énergie mécanique de la particule, pour obtenir son énergie totale, nous pouvons écrire sans difficulté :  $E_T = \int E dE = \frac{E^2}{2}$ . En réalité, il s'agit plus

---

2. Il est bien question d'une dérivée par rapport à la variable  $s$  dans notre cas tel que :  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds}$

ici d'une astuce de calcul et renormalisation de termes. Dès lors nous obtenons l'expression fondamentale suivante :

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = E^2 - 2V(r) \quad (7.13)$$

En utilisant l'expression de la métrique normalisée et en la multipliant par la composante  $g_{tt}$ , nous obtenons l'équation suivante :

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = E^2 - r^2 g_{tt} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \epsilon g_{tt} \quad (7.14)$$

avec l'expression  $L^2 = r^4 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$ , nous obtenons donc :

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = E^2 - g_{tt} \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) \quad (7.15)$$

Par identification avec l'expression fondamentale vue plus haut, nous pouvons donc en déduire l'expression finale du potentiel effectif recherché :

$$V(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) \quad (7.16)$$

On propose également de retrouver brièvement les autres expressions de l'article. Dans un premier temps, on peut montrer que l'on a trivialement :

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 \quad (7.17)$$

ce qui nous donne bien l'expression suivante :

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2} \left(E^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) \left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2}\right)\right) \quad (7.18)$$

Enfin, de la même manière nous avons :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad (7.19)$$

d'où évidemment :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left[E^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) \left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2}\right)\right] \frac{1}{E^2} \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^2 \quad (7.20)$$

## 7.4 Représentations graphiques de la composante $g_{tt}$ de la métrique et du potentiel effectif de la particule

### 7.4.1 Composante $g_{tt}$ de la métrique

Nous utiliserons pour le tracé de nos graphiques le logiciel *Matlab* dans lequel nous avons programmé des lignes de codes que le lecteur pourra retrouver dans les annexes.



Pour tracer la courbe  $g_{tt}$  suivant différentes valeurs de  $\Lambda$ , nous avons décidé de réaliser des boucles successives qui permettent l’affichage des graphes successifs. Nous obtenons donc cinq graphes que nous superposons grâce à la commande `hold on`. Nous avons choisi arbitrairement la valeur  $\Lambda = 2.5 \times 10^{-2}$  qui permettait d’obtenir un graphique similaire à celui de l’article<sup>3</sup>. Nous obtenons alors le graphique 7.1.

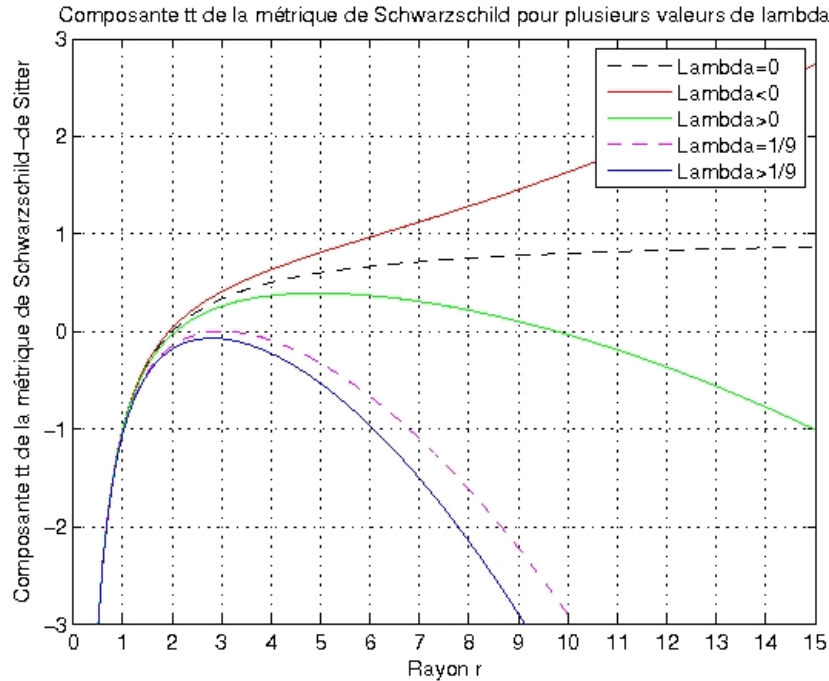


FIGURE 7.1 – Composante temporelle de la métrique de Schwarzschild pour plusieurs valeurs de la constante cosmologique  $\Lambda$

Ce que nous pouvons dire sur la figure, c’est que l’on observe une influence considérable du paramètre cosmologique  $\Lambda$  dès que l’on arrive à des rayons, assez petits, à partir de  $r = 0.5$ . Avant cette valeur, les courbes sont superposées et l’influence de  $\Lambda$  s’avère négligeable. Ce que nous retiendrons, c’est que l’influence de  $\Lambda$  sur la composante temporelle de la métrique se fait ressentir pour des distances radiales qui ne sont pas colossales.

Mathématiquement, cela se traduit par la dominance du terme en  $\frac{1}{r}$  aux petits rayons provoquant une haute valeur du potentiel asymptotique pour les valeurs tendants vers 0 tandis que pour des grandes valeurs du rayons, c’est le terme  $\frac{1}{3}\lambda r^2$  qui domine et qui explique la forte dépendance de la constante cosmologique pour des distances importantes.

Cependant, nous avons jugé utile de donner, dans le cas d’une métrique Schwarzschild-de-Sitter (i.e.  $\Lambda > 0$ ), les rayons  $r_+$  et  $r_-$  pour lesquels la fonction est nulle. La première approche tentée fut d’utiliser la commande `fzero` qui s’avérera finalement infructueuse puisqu’elle nous permettait d’obtenir seulement une seule valeur et nous devons également donner la valeur approximative autour de laquelle le programme devait chercher le zéro de la fonction.

3. On trouvera une version agrandie du graphique en annexe.

La jaugeant trop contraignante, nous avons utilisé plutôt la commande `roots` permettant de trouver les racines d'un polynôme. En effet, si nous multiplions l'expression de  $g_{tt}$  par  $r$ , nous obtenons bien le polynôme suivant :

$$g_{tt}r = -\frac{1}{3}\Lambda r^3 + r - r_s \quad (7.21)$$

soit un polynôme d'ordre trois que l'on peut résoudre numériquement.

Tentons d'abord une approche purement théorique en annulant l'équation 7.21. Nous calculons donc ses racines grâce à la méthode de résolution de Cardan qui permet de résoudre un polynôme de la forme  $z^3 + pz + q$  dont le nombre de racines est donné par le signe de son déterminant qui s'écrit  $\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3$ . En appliquant cette formule à notre équation, nous obtenons le déterminant suivant :

$$\Delta = \frac{9}{\Lambda^2}r_s^2 - \frac{4}{\Lambda} \quad (7.22)$$

avec  $\Delta < 0$  puisque le terme en  $\frac{1}{\Lambda}$  est dominant ici, avec les conditions de l'expérience. Dès lors, nous obtenons trois racines réelles dont une est négative et les deux autres, physiquement acceptables, positives.

La valeur de  $\Lambda = \frac{1}{9}$  a été choisie car elle est particulièrement intéressante notamment pour l'étude ultérieure des orbites de la sonde. Comme il s'agit d'une constante cosmologique positive, nous sommes dans le cas d'un espace-temps de Schwarzschild de Sitter. Dans le présent cas, nous constatons que pour cette valeur, la courbe bleue présente une dérivée nulle pour un certain rayon  $r$  que nous proposons de déterminer.

Il suffit de calculer la dérivée première par rapport à la variable  $r$  de  $g_{tt}$  qui nous donne l'expression du rayon  $r$  en fonction des paramètres  $r_s$  et  $\Lambda$  :

$$r_0 = \left( \frac{3r_s}{2\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7.23)$$

En appliquant numériquement cette formule, nous obtenons la valeur  $r_0 = 3$  ce qui confirme évidemment la valeur lue sur le graphique. Il est important de noter qu'il s'agit ici de la première valeur pour laquelle nous avons un horizon de Schwarzschild (i.e. les autres valeurs remarquables de  $r$  sont obtenues pour des constantes cosmologiques  $\Lambda < 1/9$ ). Ceci montre donc qu'il existe bien deux horizons pour des valeurs de la constante cosmologique  $0 < \Lambda < 1/9m^2$ .

De plus, si nous sommes dans un type de métrique du type  $(+ - - -)^4$ , nous pouvons caractériser des intervalles de genre temps si  $g_{tt} > 0$  et de genre espace dans le cas contraire ( $g_{tt} < 0$ ). Dès lors, dans le cas où  $0 < \Lambda < 1/9m^2$ , nous avons la composante temporelle  $g_{tt}$  de genre temps et la composante radiale  $g_{rr}$  de genre espace.

Pour des constantes cosmologiques situées en dehors de cet intervalle (i.e.  $r_0 < r_-$  et  $r_0 > r_+$ ), il s'agit du contraire :  $g_{tt}$  est de genre espace et la composante radiale  $g_{rr}$  de genre temps.

---

4. Il faut inverser les termes de l'explication suivante si l'on travaille dans un espace de métrique  $(- + + +)$

Après avoir demandé la recherche des indices des racines de la fonction puis le retournement de ces mêmes valeurs, nous avons donc réussi à programmer un graphique qui donne, suivant n'importe quelle valeur de la constante cosmologique  $\Lambda$  que l'utilisateur peut rentrer (en plus de la précision du pas d'itération), les valeurs des racines du polynômes, c'est à dire les valeurs évoquées précédemment  $r_-$  et  $r_+$ .

Les valeurs que nous obtenons avec les présents paramètres :  $\Lambda = 2.5 \times 10^{-2}$  et un pas de 0.1 sont  $r_- = 2.0744$  et  $r_+ = 9.7689$ .

## 7.4.2 Potentiel effectif d'une particule avec ou sans masse

Nous utilisons les grandes lignes du code utilisé précédemment et nous ne changerons que l'équation à utiliser. La grande difficulté rencontrée dans l'obtention de ce graphique fut d'obtenir une courbe similaire à celle de l'article. En effet, il fallait se placer à des rayons très grands pour observer les mêmes caractéristiques.

Nous avons pris la liberté d'étudier trois potentiels de particules pour plusieurs cadres :

- newtonien
- relativiste
- cosmologique (celui de l'article)

**Cadre newtonien** Dans le cadre de la dynamique de Newton, nous avons l'utilisé l'équation du potentiel<sup>5</sup> d'une particule suivante :

$$V_{eff} = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon \frac{2GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} \quad (7.24)$$

avec le coefficient  $\epsilon$  qui permet d'indiquer s'il s'agit d'une particule avec masse (i.e.  $\epsilon = 1$ ) ou sans masse (i.e.  $\epsilon = 0$ ).

Nous obtenons donc la figure 7.2.

Nous constatons un potentiel négatif pour une particule massive due à la masse qui va créer une barrière de potentiel pour la particule, l'empêchant de "sortir", conformément à ce que l'on peut attendre d'un point de vue purement physique. Cependant, dans le cas d'une particule sans masse (e.g. un photon), le potentiel devient positif et est l'inverse du cas avec masse. Il y a ici très certainement une lacune de modélisation que nous devons améliorer avec les modèles qui suivent.

Nous avons en plus programmé le tracé graphique du même potentiel pour plusieurs valeurs du paramètre  $L$  d'abord dans le cas d'une particule massive comme nous le montre la figure 7.3 puis dans le cas d'une particule sans masse que nous présenterons en figure 7.4.

Pour la figure 7.3 la barrière de potentiel se réduit et devient de moins en moins importante, plus  $L$  augmente. D'une certaine manière, nous pouvons expliquer ceci par une "compensation" de l'effet gravitationnel subit par la particule grâce à l'augmentation de son moment angulaire  $L$ . Nous avons une convergence vers la valeur 0.5 dans tous les cas ; il s'agit bien là d'une stabilisation du système comme l'on peut s'y attendre<sup>6</sup>.

5. Les formules suivantes sont données *ad hoc* et font l'objet d'une démonstration dans le cours [8]

6. Ceci reste également valable dans le cadre des autres modèles comme nous le verrons ci-après.

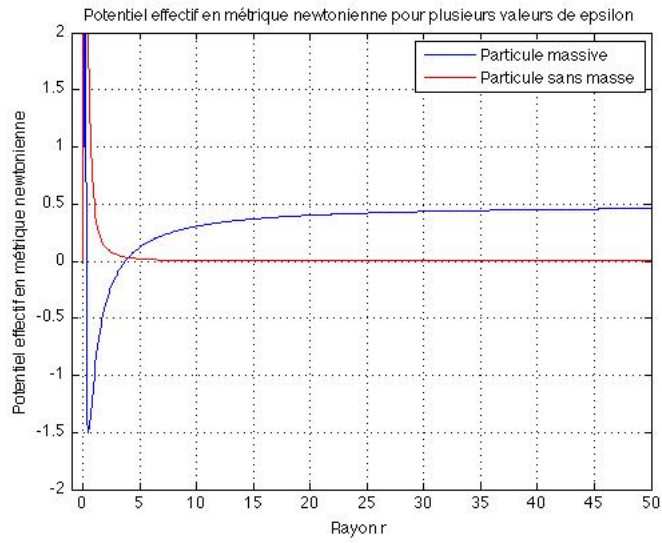


FIGURE 7.2 – Potentiel effectif en métrique newtonienne pour une particule massive

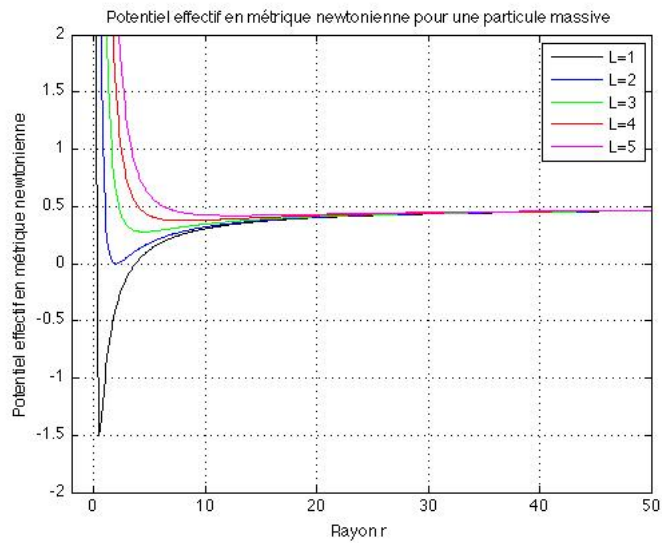


FIGURE 7.3 – Potentiel effectif en métrique newtonienne pour une particule massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$

Dans le cas de la figure 7.4 même commentaire que précédemment à la différence que l'augmentation de  $L$  ne compense aucune autre force puisque la particule sans masse ne ressent pas l'effet gravitationnel dans le cadre newtonien. C'est une lacune que comblera la relativité générale comme nous le verrons.

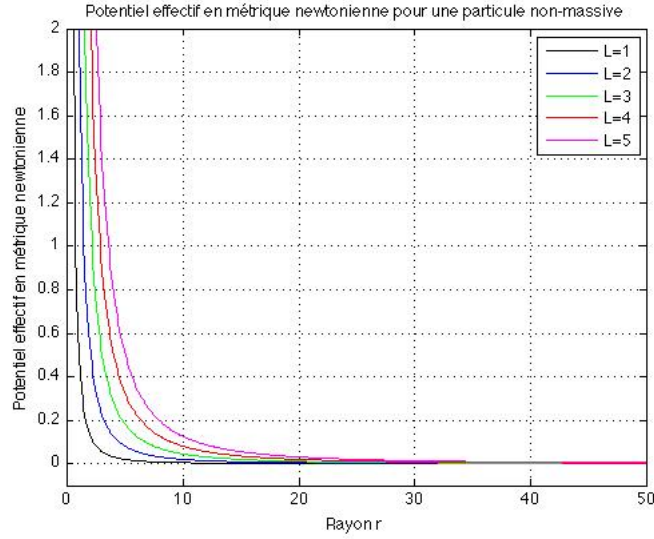


FIGURE 7.4 – Potentiel effectif en métrique newtonienne pour une particule non massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$

**Cadre relativiste** Dans le cadre de la dynamique de la relativité restreinte, nous avons utilisé l'équation du potentiel d'une particule suivante :

$$V_{eff} = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon \frac{2GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} \quad (7.25)$$

avec le coefficient  $\epsilon$  qui permet d'indiquer si il s'agit d'une particule avec masse (i.e.  $\epsilon = 1$ ) ou sans masse (i.e.  $\epsilon = 0$ ).

La figure 7.5 nous montre une barrière de potentiel assez classique dans le cas d'une particule massive (et toujours une stabilisation vers 0.5). En revanche, pour la particule sans masse, nous serons heureux de remarquer une amélioration de la concordance physique avec l'apparition d'un potentiel négatif, que ressent la particule à présent. Elle présente également une légère courbure avant sa stabilisation à la valeur 0.

De la même manière que dans le cas newtonien, nous traçons également les graphiques pour différentes valeurs de  $L$  dans le cas d'une particule massive en figure 7.6 et non massive en figure 7.7.

En ce qui concerne la figure 7.6, nous constatons toujours l'influence primordiale du paramètre  $L$  qui compense toujours les effets gravitationnels avant la stabilisation de la valeur du potentiel vers 0.5.

Mais pour la figure 7.7, seul l'effet de  $L^2$  se fait ressentir majoritairement et conduit à des courbures très importantes du potentiel avant stabilisation vers 0.

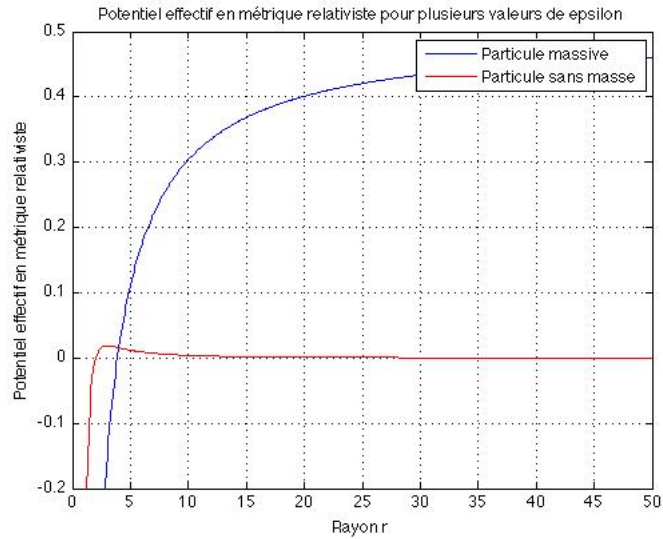


FIGURE 7.5 – Potentiel effectif en métrique relativiste pour une particule massive et une particule non massive

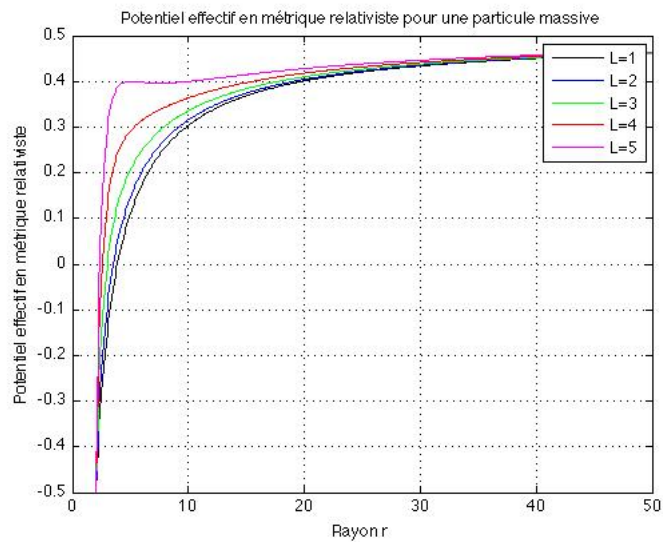


FIGURE 7.6 – Potentiel effectif en métrique relativiste pour une particule massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$

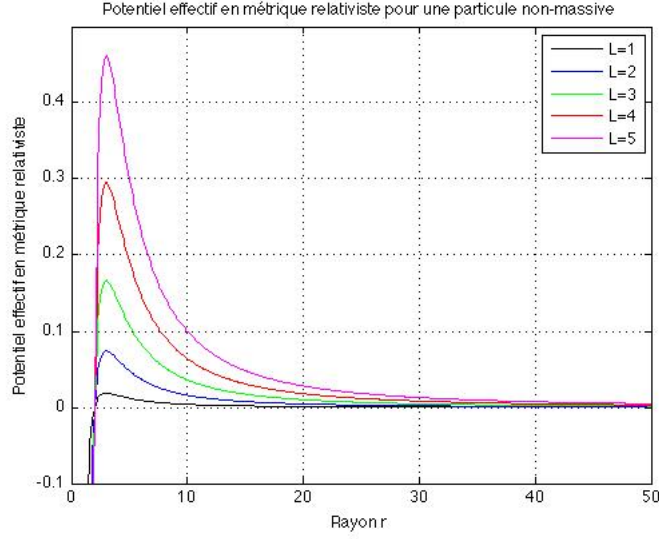


FIGURE 7.7 – Potentiel effectif en métrique relativiste pour une particule non massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$

**Cadre cosmologique** Nous étudions donc le cas présenté dans le rapport dont nous rappelons l'équation du potentiel effectif :

$$V(r) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r_S}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + \epsilon \right) \quad (7.26)$$

avec le coefficient  $\epsilon$  qui permet d'indiquer si il s'agit d'une particule avec masse (i.e.  $\epsilon = 1$ ) ou sans masse (i.e.  $\epsilon = 0$ ).

Nous obtenons alors le même graphique que celui présenté dans l'article :

La barrière de potentiel est toujours présente aux petits rayons  $r \sim 15$  pour la figure 7.8 puis on observe une différenciation de l'allure des courbes en fonction du paramètre  $\Lambda$  pour les plus grands rayons. L'influence du paramètre cosmologique  $\Lambda$  apparaît donc pour de grandes distances.

Notons également que l'on observe toujours une stabilisation à 0.5 dans le cas où la constante cosmologique  $\Lambda$  est nulle permettant de raccorder nos observations aux graphes précédents.

Puis nous remarquons également une zone de stabilité pour la particule qui se situe au niveau du creux de la courbe c'est à dire pour des distances comprises entre des rayons compris entre  $r = 10$  et  $r = 38$ .

Enfin, notons que pour un espace temps de Schwarzschild-(anti)-de Sitter (i.e.  $\Lambda < 0$ ), on constate une divergence du potentiel effectif vers  $+\infty$  pour de très grandes distances.

De la même manière que dans les cas précédents, nous traçons également les graphiques pour différentes valeurs de  $L$  dans le cas d'une particule massive en figure 7.9 et non massive en figure 7.10.

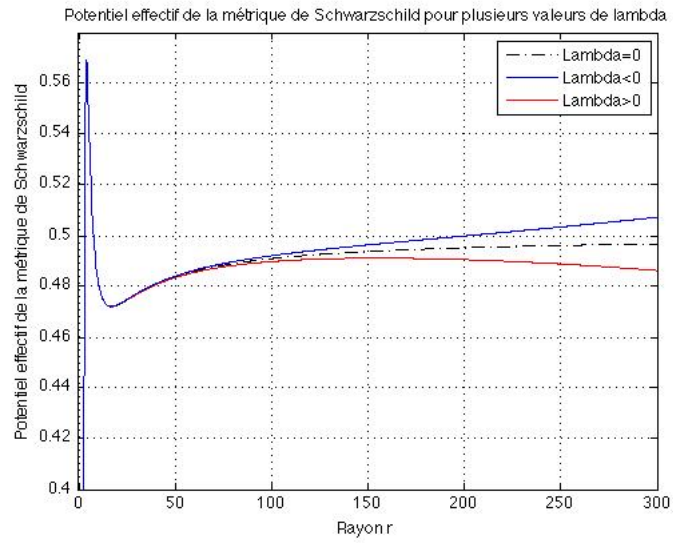


FIGURE 7.8 – Potentiel effectif en métrique de Schwarzschild pour une particule massive et une particule non massive

Toujours les mêmes constatations que précédemment pour la figure 7.9 avec une inflexion qui croît avec  $L$  et qui compense la courbure spatio-temporelle.

Enfin, pour la figure 7.10, mêmes observations que pour les graphes précédents avec toujours notre stabilisation vers 0.



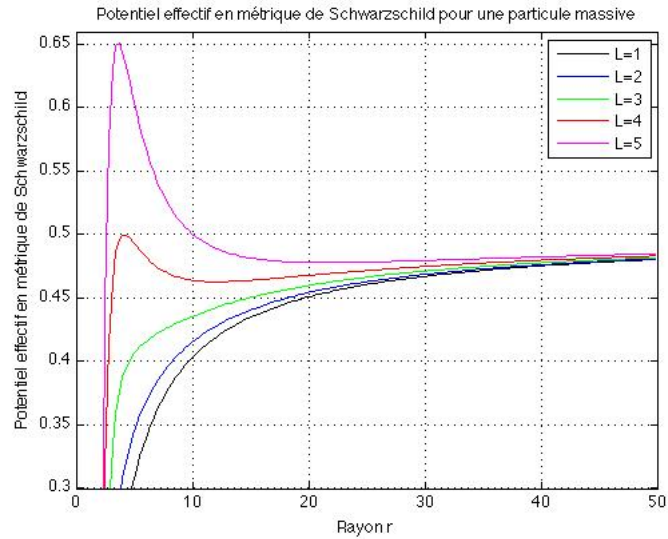


FIGURE 7.9 – Potentiel effectif en métrique de Schwarzschild pour une particule massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$

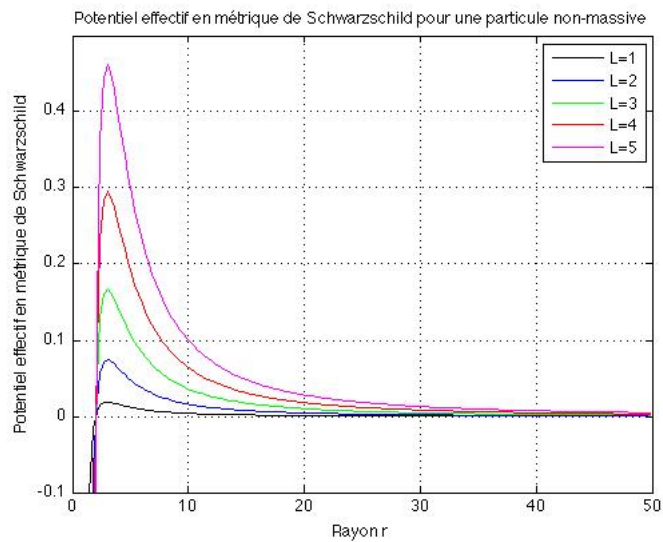


FIGURE 7.10 – Potentiel effectif en métrique de Schwarzschild pour une particule non massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$

## 7.5 Obtention de l'intégrale du "problème de l'inversion"

Nous continuons donc la démonstration des autres calculs de l'article qui vont nous mener à un point crucial de l'article, celui du problème de l'inversion.

Nous décidons dans un premier temps de simplifier nos équations en posant  $u = \frac{r_S}{r}$  dont la dérivée nous donne trivialement  $du = -\frac{r_S}{r^2}dr$  soit encore :

$$dr = -\frac{r_S}{u^2}du \quad (7.27)$$

Dès lors, comme nous avons l'égalité suivante :

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(-\frac{r_S}{u^2}\right)^2 \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 \quad (7.28)$$

nous obtenons alors l'équation :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{u^2}{r_S}\right)^2 \left(\frac{r^4}{L^2}\right) \left[E^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) \left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2}\right)\right] \quad (7.29)$$

qui devient après notre changement de variable :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r_S}{L^2}E^2 - \epsilon\frac{r_S}{L^2} - u^2 + u\frac{r_S^2}{L^2}\epsilon + u^3 + \frac{1}{3}\Lambda\frac{r_S^2}{u^2}\frac{r_S^2}{L^2}\epsilon + \frac{1}{3}\Lambda r_S^2 \quad (7.30)$$

Puis, si nous posons<sup>7</sup>  $\lambda = \frac{r_S^2}{L^2}$ ,  $\mu = E^2$  et  $\rho = \frac{1}{3}\Lambda r_S^2$ , nous obtenons donc l'équation désirée :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = u^3 - u^2 + \epsilon\lambda u + \lambda(\mu - \epsilon) + \rho + \frac{\epsilon\lambda\rho}{u^2} \quad (7.31)$$

Pour écrire l'équation 7.31 sous forme d'un polynôme, il suffit de la multiplier par  $u^2$  et nous obtenons un polynôme d'ordre 5 en  $u$  que l'on appellera  $P_5(u)$  :

$$P_5(u) = \left(u\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = u^5 - u^4 + \epsilon\lambda u^3 + [\lambda(\mu - \epsilon) + \rho]u^2 + \epsilon\lambda\rho \quad (7.32)$$

Nous considérons dans la suite que l'on prend une particule massive (i.e.  $\epsilon = 1$ ) et les constantes  $\mu \geq 0$  et  $\lambda \geq 0$ .

Puis, en effectuant une séparation des variables pour l'équation 7.32, nous obtenons l'égalité :

$$d\varphi = \frac{udu}{\sqrt{P_5(u)}} \quad (7.33)$$

soit, après intégration sur la variable  $\varphi$  :

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{u_0}^u \frac{udu}{\sqrt{P_5(u)}} \quad (7.34)$$

---

7. Les termes sont adimensionnés

### 7.5.1 Moyens proposés pour la résolution de cette intégrale

**Outils mathématiques suggérés** A la vue de l'égalité 7.34, nous pensons directement aux intégrales curvilignes et non-triviales pour la résolution de l'équation. Les outils mathématiques comme les intégrales de Cauchy, l'utilisation du théorème des résidus, le lemme de Jordon ont été consultés me s'avèrent d'aucune aide dans le présent cas.

Une des contraintes majeures nécessitées par l'utilisations des outils mathématiques cités précédemment est le fait que nous devons avoir la fonction à intégrer *holomorphe* (i.e. c'est à dire à valeur dans  $\mathbb{C}$  et définie, dérivable en tout point d'un sous-ensemble du plan complexe  $\mathbb{C}$ ). Notons que cette condition est beaucoup plus forte que celle de la dérivabilité réelle.

Pendant, toute fonction polynomiale à coefficients complexes est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  mais le problème majeur réside dans la racine carrée. En effet, nous obtiendrons deux branches, l'une positive et l'autre négative. Cette condition nous empêche de continuer notre raisonnement avec les outils précédents.

**Deuxième problème de résolution** Souvenons-nous, qu'à l'origine, nous cherchions les solutions de l'équation de la géodésique dans un espace temps de Schwarzschild. Mais nous avons réduit le problème dans le plan équatorial nous donnant une équation avec  $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$  de solution de paramètre  $r$ . Par extension,  $u(\varphi)$  décrit la solution de l'équation de la géodésique.

Dans ce cas,  $r(\varphi)$  et à fortiori  $u(\varphi)$ , ne doivent pas dépendre du chemin choisi car la solution est unique.

Dès lors, pour un chemin fermé noté  $\omega$ , nous pouvons écrire :

$$\oint_{\omega} \frac{udu}{\sqrt{P_5(u)}} = \omega \quad (7.35)$$

L'ajout de ce même circuit fermé, ne modifie pas sa valeur finale<sup>8</sup> :

$$\int_{u_0}^u \frac{u'du'}{\sqrt{P_5(u')}} - \oint_{\omega} \frac{udu}{\sqrt{P_5(u)}} = \int_{u_0}^u \frac{u'du'}{\sqrt{P_5(u')}} \quad (7.36)$$

ce qui est équivalent à écrire :

$$\varphi - \varphi_0 - \omega = \int_{u_0}^u \frac{u'du'}{\sqrt{P_5(u')}} \quad (7.37)$$

Donc la fonction  $u(\varphi)$  est une fonction périodique de période  $\omega$  qui peut s'écrire sous la forme :

$$u(\varphi) = u(\varphi - \omega) \quad (7.38)$$

**La proposition de Hackmann et Lämmerzahl** Les auteurs proposent, quant à eux, l'utilisation de mathématiques d'un niveau assez élevé en considérant l'intégrale à traiter

---

8. Que l'on ajoute ou que l'on retranche l'intégrale du circuit n'a pas d'importance sachant que nous parlerons de périodicité

comme une surface de Riemann<sup>9</sup> notée  $X$  de la fonction  $x \mapsto \sqrt{P_5(u)}$ .

Pour terminer cette grande partie sur l'équation de la géodésique, nous insisterons sur le fait que la partie de l'inversion du problème (i.e. partie III de l'article) est très ardue mathématiquement. Aussi intéressante soit-elle, nous la considérerons comme admise dans le rapport afin de passer au problème suivant et l'étude du problème de l'anomalie Pioneer que nous continuons avec le chapitre IV de l'article de Hackmann et Lämmerzahl.

---

9. La surface de Riemann est une variété différentielle analytique complexe de dimension un. Il s'agit là de géométrie différentielle.

## Chapitre 8

# Solution de l'équation du mouvement dans un espace-temps Schwarzschild-(anti)-de Sitter

Nous poserons comme admises les parties mathématiques du problème notamment celle de l'inversion de Jacobi et de ses solutions.

### 8.1 Éléments de géométrie différentielle

Cette partie a pour but d'introduire rapidement les définitions de quelques outils mathématiques nécessaires à l'étude de notre problème.

Souvenons-nous que notre but était de résoudre l'équation 7.34 grâce à l'outil mathématique des surfaces de Riemann<sup>1</sup>. Dès à présent, nous limitons le *genus*<sup>2</sup> du problème de l'inversion de Jacobi à 2. Alors, d'après la théorie de la carte d'Abel et Jacobi (*the Abel-Jacobi Map*), nous pouvons exprimer l'angle  $\varphi$ , utilisé pour déterminer un  $\vec{x}$ , composantes vectorielles de la surface de Riemann (notée  $X$ ) grâce à l'équation suivante :

$$\vec{\varphi} = A_{x_0}(\vec{x}) \quad (8.1)$$

ce qui, avec un *genus* égal à 2, nous donne :

$$\varphi_1 = \int_{x_0}^{x^1} \frac{dz}{\sqrt{P_5(z)}} + \int_{x_0}^{x^2} \frac{dz}{\sqrt{P_5(z)}} \quad (8.2)$$

ainsi que :

$$\varphi_2 = \int_{x_0}^{x^1} \frac{zdz}{\sqrt{P_5(z)}} + \int_{x_0}^{x^2} \frac{zdz}{\sqrt{P_5(z)}} \quad (8.3)$$

---

1. Voir article original

2. Le *genus* désigne une particularité des surfaces de Riemann. Il peut être éventuellement défini comme la dimension spatiale des holomorphismes différentiels de la surface de Riemann ou, plus intuitivement, de façon topologique comme le nombre de trous dans notre surface de Riemann.

Les équations 8.2 et 8.3 sont des éléments qui nous permettront un calcul analytique de la fonction généralisée de Weierstrass que l'on définit de la façon suivante :

$$\wp_{ij}(\vec{z}) = \frac{\sigma_i(\vec{z})\sigma_j(\vec{z}) - \sigma(\vec{z})\sigma_{ij}(\vec{z})}{\sigma^2(\vec{z})} \quad (8.4)$$

définies elles-mêmes par les fonctions sigma de Klein par définition :

$$\sigma(\vec{z}) = C e^{-\frac{1}{2}\vec{z}^t \eta \omega^{-1}} \Theta((2\omega)^{-1}\vec{z} + \vec{K}_{x_0}; \tau) \quad (8.5)$$

Les termes sous la forme  $\sigma_i$  désignent les dérivées de la fonction sigma par rapport à la  $i^{me}$  composante et les fonctions theta de Riemann notées  $\Theta$ .

Ces formules sont assez compliquées à modéliser donc nous ne les utiliserons pas directement dans la suite du rapport. Néanmoins, en appliquant ces outils mathématiques au problème de la résolution de l'équation de l'inversion du problème, les auteurs de l'article obtiennent finalement la relation fondamentale :

$$r(\varphi) = \frac{r_S}{u(\varphi)} = -r_S \frac{\sigma_2(\vec{\varphi}_\infty)}{\sigma_1(\vec{\varphi}_\infty)} \quad (8.6)$$

L'équation 8.6 est la solution de l'équation du mouvement pour une particule ponctuelle dans un espace-temps de Schwarzschild-(anti)-de Sitter pour n'importe quelle signe de la constante cosmologique  $\Lambda$ .

Dans la prochaine partie, nous nous occuperons de déterminer la trajectoire d'une particule avec et sans masse dans ce même espace-temps pour passer à la création de graphiques présentant différentes trajectoires en fonction de la valeur de la constante cosmologique  $\Lambda$ .

## 8.2 Trajectoire pour une particule sans masse

Nous réutilisons l'équation 7.31, pour laquelle nous prendrons un  $\epsilon$  nul pour rendre compte du fait que nous travaillons avec une particule non-massive. Ce cas est intéressant puisqu'il permet d'effectuer des simplifications de calculs très intéressantes.

Dès lors, nous obtenons le polynôme<sup>3</sup> d'ordre trois suivant :

$$P_3(u) = u^3 - u^2 + \lambda\mu + \rho \quad (8.7)$$

De plus, nous donnerons une condition limite pour donner l'expression de la dynamique de cette particule. Nous utiliserons la distance extrémale  $u_0$  pour laquelle la vitesse de notre particule devient nulle c'est à dire :

$$\left. \frac{du}{d\varphi} \right|_{u=u_0} = 0 \quad (8.8)$$

ce qui implique trivialement :

$$P_3(u) = u^3 - u^2 + u_0^2 - u_0^3 \quad (8.9)$$

---

3. Notons à ce titre, qu'une erreur s'est logée dans l'article de Hackmann et Lämmerzahl. En effet, il faut remplacer  $\frac{1}{3}\rho$  par  $\rho$  d'après les calculs.

Puis, en posant  $u = 4x + \frac{1}{3}$ , nous pourrions résoudre le problème en utilisant les fonctions généralisées de Weierstrass et avec les solutions de type elliptique. Après remplacement dans l'équation 8.9, nous obtenons finalement :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 4x^3 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{27} + \frac{1}{2}(u_0^3 - u_0^2)\right] \quad (8.10)$$

Les préfacteurs  $\frac{1}{12}$  et  $\frac{1}{8}\left[\frac{1}{27} + \frac{1}{2}(u_0^3 - u_0^2)\right]$  sont des invariants de Weierstrass qui vont nous permettre d'utiliser les outils complexes de géométrie différentielle mentionnés auparavant. En effet, nous pourrions écrire la solution grâce à la fonction de Weierstrass :

$$r(\varphi) = \frac{r_S}{u(\varphi)} = \frac{r_S}{4x(\varphi) + \frac{1}{3}} = \frac{r_S}{4\wp(\varphi - \varphi_0'; g_2; g_3)} + \frac{1}{3} \quad (8.11)$$

avec la condition initiale  $\varphi_0' = \varphi_0 + \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}}$ .

## 8.2.1 Tentative de modélisation avec les fonctions de Weierstrass

L'objectif de ce chapitre est de modéliser les trajectoires des orbites de nos particules test dans l'espace-temps de Schwarzschild. Nous avons donc cherché à modéliser directement l'équation 8.11 en terme de fonctions généralisées de Weierstrass.

Cependant, à la vue de la complexité des formules 8.4 et 8.5, nous avons recherché s'il existait d'autres expressions des fonctions de Weierstrass et sigma Klein. Il est en effet possible d'obtenir une expression sous forme de séries de ces deux fonctions :

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum'_{m,n} \left\{ \frac{1}{(u - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right\} \quad (8.12)$$

avec les quantités  $2\omega_1$  et  $2\omega_2$  qui sont les périodes de la fonction généralisée de Weierstrass et se définissent en fonction du signe du discriminant  $\Delta$  qui s'exprime lui même en fonction des invariants de Weierstrass notés  $g_2$  et  $g_3$ . Encore une fois, la modélisation s'avérerait particulièrement lourde dans le présent cas et ne permettrait de couvrir que le cas d'une particule massive.

En conséquence, nous avons abandonné l'idée d'une modélisation invoquant de telles formules pour essayer une autre approche.

## 8.2.2 Tentative de modélisation grâce aux séries

L'avant-dernière tentative pour modéliser ces fonctions fut d'utiliser les expressions sous forme de séries de Laurent pour la fonction généralisée de Weierstrass que nous pouvons écrire :

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{4 \cdot 5} + \frac{g_3 u^4}{4 \cdot 7} + \frac{g_2 u^6}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} + \frac{3g_2 g_3 u^8}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} + \dots \quad (8.13)$$

et la fonction  $\sigma^4$  qui peut s'écrire également :

$$\sigma(z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}g_2\right)^m (2g_3)^n \cdot \frac{z^{4m+6n+1}}{(4m+6n+1)!} \quad (8.14)$$

avec les coefficients  $a_{m,n}$  définis en fonction des variables  $m$  et  $n$ .

Dans les deux cas, nous retrouvons toujours les invariants de Weierstrass  $g_2$  et  $g_3$  qui, eux mêmes, dépendent du type d'équation utilisé en appliquant les fonctions elliptiques de Weierstrass.

Nous avons modélisé une première version de notre programme en utilisant les équations précédentes mais le résultat n'était pas satisfaisant. Par conséquent, il sera plus intéressant de modéliser une expression plus générale de notre dynamique de particule qui pourrait prendre en compte les deux cas, avec et sans masse. Ce sera l'objet du chapitre suivant qui présente la modélisation des trajectoires des particules test dans un espace-temps de Schwarzschild.

---

4. D'après l'ouvrage *Handbook of Mathematical Functions* par Milton Abramowitz et Irene A. Segun - 1960



## Chapitre 9

# Modélisation des trajectoires des particules test

Grâce à l'expression de la solution analytique décrite par l'équation 8.6, nous pouvons nous intéresser à la description des trajectoires suivies par les particules test en mouvement dans un espace-temps de Schwarzschild.

### 9.1 Choix de l'équation maîtresse

Cependant, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, nous devons utiliser une équation qui nous permettrait de décrire à la fois le comportement d'une particule sans masse et avec masse.

Il nous suffit de remonter plus haut dans les calculs jusqu'à l'équation 7.31 que nous rappelons ci-dessous :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = u^3 - u^2 + \epsilon\lambda u + \lambda(\mu - \epsilon) + \rho + \frac{\epsilon\lambda\rho}{u^2} \quad (9.1)$$

Et en utilisant trivialement la solution de l'équation de la géodésique 8.6, il nous est tout à fait possible de relier la distance radiale  $r$  de la particule à l'angle  $\varphi$ .

Nous rappelons également que les paramètres sur lesquels nous pouvons agir s'écrivent :

$$\mu = E^2, \lambda = \left(\frac{r_s}{L}\right)^2 \text{ et } \rho = \frac{1}{3}\Lambda r_s^2$$

Donc, on agit indirectement sur l'énergie totale de la particule  $E$  ainsi que sur son moment angulaire  $L$  par l'intermédiaire de ces paramètres. L'influence de la constante cosmologique  $\Lambda$ , quant à elle, est effective avec  $\rho$ .

La dynamique du mouvement de la particule test peut également s'écrire sous forme polynomiale comme nous l'avons vu avec l'équation 7.32. Cependant, comme nous le verrons dans la partie suivante, l'analyse des racines du polynôme  $P_5(u)$  est déterminante quant à l'analyse des trajectoires.

## 9.2 Racines du polynôme

Les trajectoires physiques exploitables sont celles pour lesquelles l'énergie totale de la particule est supérieure à celle du potentiel effectif qu'elle subit. En d'autres termes et mathématiquement parlant, cette condition se traduit par l'annulation du polynôme  $P_5(u)$  :

$$P_5(u) = \left(u \frac{du}{d\varphi}\right)^2 = u^5 - u^4 + \epsilon\lambda u^3 + [\lambda(\mu - \epsilon) + \rho] u^2 + \epsilon\lambda\rho = 0 \quad (9.2)$$

En effet, nous avons obtenu l'expression 7.13 permettant de relier l'énergie totale de la particule à son énergie potentielle :

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = [E^2 - 2V(r)] \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 \quad (9.3)$$

L'équation 9.3 présente des trajectoires physiquement acceptables si  $\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 > 0$  c'est à dire si l'on a  $E^2 > 2V(r)$ . Cette condition entraîne inéluctablement la condition suivante :

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = P_5(u) > 0 \quad (9.4)$$

On comprend donc qu'il est nécessaire de calculer les racines du polynôme  $P_5(u)$  qui vous donner de précieuses informations sur le type de trajectoires que nous obtenons pour nos particules test.

Par définition mathématique, un polynôme de degré égal à cinq possède au plus cinq racines. Le signe du polynôme est également déterminé par le nombre de racines qu'il possède c'est à dire si elles sont en nombre pair ou impair.

Pour illustrer cette propriété mathématique des polynômes, nous proposons à la manière d'Hackmann, une illustration des domaines physiquement viables pour notre études, en fonction du nombre de racines du polynôme étudié en figure 9.1.

Puis nous proposons, comme dans l'article de Hackmann et Lämmerzahl, un programme permettant la localisation du nombre de zéros de la fonction polynôme  $P_5(u)$  en fonction de la variation des paramètres  $\mu$  et  $\lambda$ .

### 9.2.1 Recherche du nombre de zéros en fonction de $\mu$ et $\lambda$

Toujours dans la continuité de l'article, nous décidons également de coder un programme permettant de retrouver les courbes présentant le nombre de zéros du polynôme  $P_5(u)$  en fonction des paramètres  $\mu$  et  $\lambda$ .

Ces tracés nous permettront d'en déduire indirectement le type d'orbite que l'on peut avoir en fonction de la valeur de la constante cosmologique  $\Lambda$  (i.e. c'est à dire de savoir si nous sommes dans un espace (anti) ou de-Sitter).

**Description du programme** Nous prenons garde de bien définir toutes les constantes importantes de notre programme.

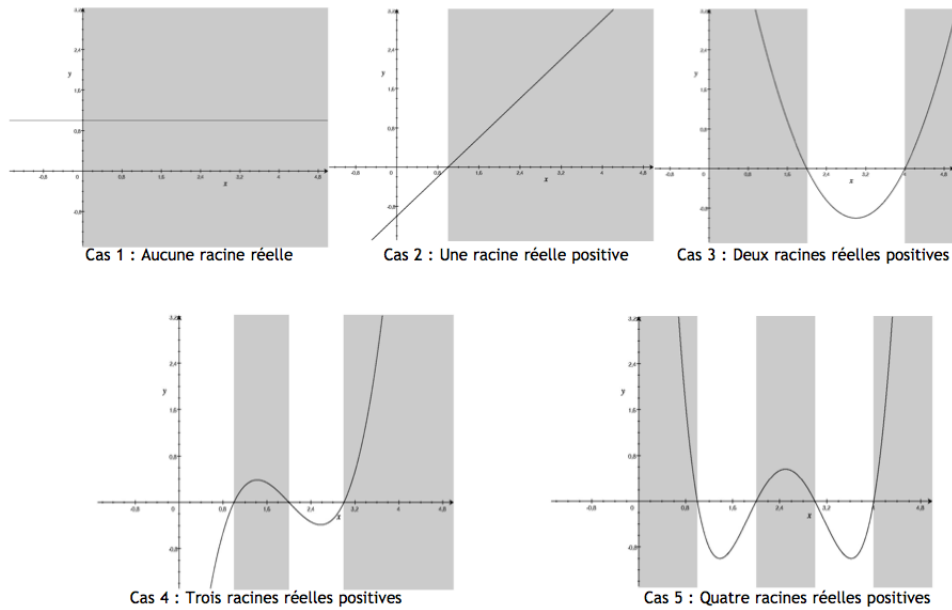


FIGURE 9.1 – Domaines physiquement viables (en gris) pour des nombres différents de racines de polynôme.

En particulier, nous travaillerons avec une particule massive donc le paramètre  $\epsilon = 1$  en accord avec l'équation 7.31.

Puis nous cherchons ensuite les racines du polynôme en sélectionnant les réelles (i.e. traduit dans le programme par celles dont la partie imaginaire est nulle) et positives.

On effectue ensuite une itération sur la variable somme au fur et à mesure que le programme trouve une racine réelle positive pour un  $\mu$  et un  $\lambda$  donné.

Enfin, on effectue le tracé du nombre de zéros (i.e. racines) du polynôme grâce à la fonction de Matlab `image`<sup>1</sup>. Cette fonction trace un graphique à partir d'une matrice de nombre qu'elle utilise comme base. Pour chaque valeur rencontrée dans le tableau, la fonction va teinter la partie du graphique correspondant dans une teinte plus ou moins prononcée.

Ainsi, il nous est possible d'analyser très rapidement le type de trajectoires que l'on peut rencontrer en fonction des paramètres du problème.

**Résultats obtenus** Nous retrouvons bien les résultats obtenus par Hackmann pour une particule massive avec notre programme comme le montre la figure 9.2.<sup>2</sup>

Les trois premiers graphiques du haut de l'image ont été obtenus pour un espace-temps de Schwarzschild-(anti-) de Sitter (i.e. une constante cosmologique négative). On s'aperçoit que l'on a une zone majoritaire pour laquelle nous avons deux racines pour le polynôme. Cette zone grise comportera donc des orbites terminales (i.e. *terminating bound*) et des orbites de

1. Je remercie M. Arnaud Beth qui nous a permis de mettre la main sur cette fonction.  
 2. Pour une particule non massive (i.e.  $\epsilon = 0$ ) voir le même graphique en annexe

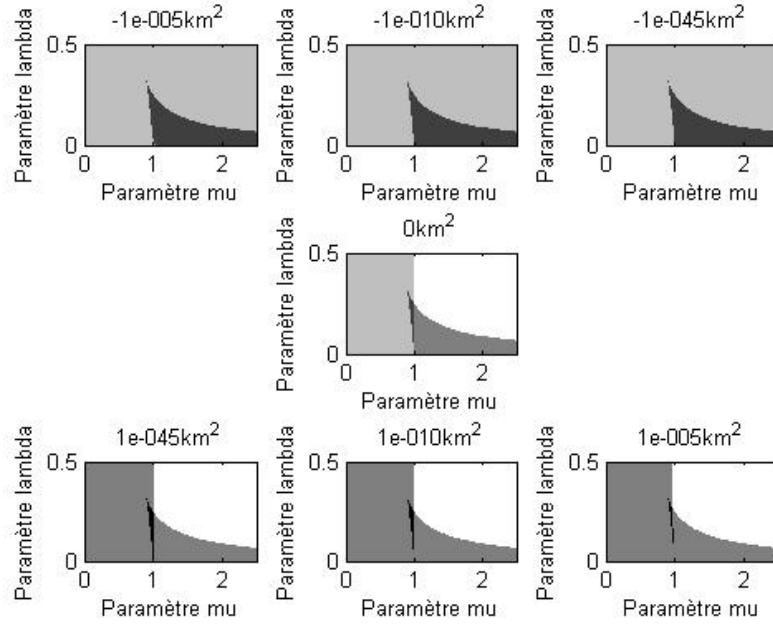


FIGURE 9.2 – Nombre de racines réelles positives (Blanc : 0 Gris clair : 1 Gris : 2 Gris foncé : 3 Noir : 4) en fonction des paramètres  $\mu$  et  $\lambda$  pour une valeur de la constante cosmologique  $\Lambda$  donnée pour une particule massive (i.e.  $\epsilon = 1$ )

type "vol" (i.e. en anglais, *flyby orbits*) comme nous l'expliciterons dans le programme des trajectoires de particules test.

La zone grise plus foncée traduit quant à elle, les zones pour lesquelles nous avons des orbites circulaires (i.e. *bound orbits*) ou terminales.

Le graphique central pour lequel la constante cosmologique est prise comme nulle (i.e.  $\Lambda = 0$ ) montre une zone blanche pour laquelle nous avons des orbites de capture terminaux de la particule test. La zone gris clair correspond aux orbites terminales uniquement et la grise foncée, comme toujours, aux orbites vols et terminales.

Puis les trois figures du bas sont valables dans un espace-temps de Schwarzschild-de-Sitter (i.e. pour  $\Lambda > 0$ ) nous montre que l'on s'attend à trouver des orbites de capture terminale, circulaires ou terminales.

Dans une région très restreinte du graphique, c'est à dire pour des valeurs de  $\lambda = 0,040,32$  et de  $\mu = 0,891$ , nous avons le cas des orbites de vols, circulaires et terminales.

Finalement, ce que l'on peut remarquer d'intéressant dans le regroupement de toutes ces figures, c'est que dès que l'on atteint la valeur  $\mu = 1$  environ, le graphe se scinde effectivement en deux parties.

Dans le cas d'un espace-temps de Scharzwschild-(anti-)de Sitter, passée la valeur  $\mu = 1$ , on trouve des orbites circulaires que l'on obtenait pas pour d'autres valeurs de  $\mu$ .

Et pour un espace-temps de Schwarzschild-de-Sitter, après cette valeur de  $\mu = 1$ , on ren-

| Région | Nombre de zéros | Intervalles   | Types d'orbites   |
|--------|-----------------|---------------|---|
| I      | Zéro            | —————         | Orbite de capture terminale                               |
| II     | Un              | ●—————        | Orbite terminale  |
| III    | Deux            | ———●●———      | Orbite de vol<br>ou orbite terminale                      |
| IV     | Trois           | ●———●●———     | Orbite circulaire<br>ou orbite terminale                  |
| V      | Quatre          | ———●●———●●——— | Orbite de vol ou<br>orbite circulaire ou orbite terminale |

FIGURE 9.3 – Types d'orbites obtenus en fonction du nombre de racines du polynôme  $P_5(u)$ .

contre des orbites circulaires une nouvelles fois.

Dans les deux cas d'espace-temps, on conclut donc que l'apparition d'orbites circulaires apparaît bien pour une valeur commune de  $\mu = 1$ . Ces orbites circulaires nous seront utiles lors de l'application numérique au sujet de ce mémoire, l'anomalie Pioneer.

**Récapitulatif du type d'orbite en fonction du nombre de racines de  $P_5(u)$**  Nous résumons dans le tableau 9.3 suivant les types d'orbites que l'on peut obtenir en fonction du nombre de racines (i.e. de zéros) du polynôme  $P_5(u)$ .

### 9.3 Originalité de notre approche

Notre but fut évidemment de modéliser l'équation maîtresse 9.1 à l'aide de la variable  $u$ , variable que nous devons étudier pour ensuite en déduire la variable  $r(\varphi)$ .

A la différence de l'approche analytique d'Hackmann dans sa thèse<sup>3</sup>, nous n'effectuerons pas de différence d'équation entre les cas d'une particule massive (i.e.  $\epsilon = 1$ ) et d'une particule non-massive (i.e.  $\epsilon = 0$ ) lumière.

En effet, l'équation se révèle assez simple pour le cas d'une particule à masse nulle :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = u^3 - u^2 + \lambda\mu + \rho \quad (9.5)$$

Il s'agit en effet là d'un polynôme d'ordre trois dont la résolution n'est pas très compliquée d'un point de vue numérique. D'un point de vue analytique, elle nécessite l'utilisation de la

3. Eva Hackmann *Geodesic equations in black hole space-times with cosmological constant* - 2010

fonction généralisée de Weierstrass<sup>4</sup>.

Mais pour le cas d'une particule massive, nous utilisons également les fonctions sigma de Klein, en plus des fonctions généralisées de Weierstrass. La résolution se complique sensiblement.

Ce que nous proposons ici est donc de partir de l'équation maîtresse sur laquelle se base tous les programmes qui suivront. Ainsi, nos programmes seront en mesure d'étudier les deux cas de particules test, sans utiliser les outils de mathématiques différentielles comme c'est le cas dans l'étude détaillée de Hackmann et Lämmerzahl.

## 9.4 Modélisation des orbites

### 9.4.1 Description du programme

Le programme a été conçu par Matlab par l'auteur de ce mémoire et est capable de tracer les trajectoires de particules massive ou non, en fonction de leur énergie au carré  $E^2$  et de leur moment angulaire  $L$  dans un espace-temps de Schwarzschild-(anti-) de Sitter ou Schwarzschild-de-Sitter suivant le signe et la valeur de la constante cosmologique  $\Lambda$  également laissée au choix de l'utilisateur du programme.

De plus, le programme se charge de calculer automatiquement les racines du polynôme pour faciliter le choix des conditions initiales permettant de choisir le type d'orbite désiré.

Le programme utilise les constantes fondamentales  $G$  (constante de gravitation newtonienne),  $c$  (vitesse de la lumière dans le vide) et  $M$  (masse de l'astre central dans le cas de l'approximation en champ faible dont bénéficie la métrique de Schwarzschild) toutes égales à un pour faciliter l'étude des trajectoires.

Nous laissons ensuite le choix du cas avec ou sans masse, pour la particule en définissant la valeur de  $\epsilon$  puis de la valeur de la constante cosmologique  $\Lambda$ .

La rentrée des paramètres importants  $E^2$  et  $L$  sont ensuite demandés à l'utilisateur. Comme nous le verrons, ces paramètres déterminent les caractéristiques physiques de la sonde.

Nous cherchons ensuite les racines du polynôme  $P_5(u)$  en triant les racines d'abord réelles, puis positives qui nous intéressent pour notre étude. On retourne également la valeur du nombre de racines à l'utilisateur afin qu'il puisse choisir la racine désirée au moment où la question lui est posée.

L'utilisateur a ensuite le luxe de compléter son étude en choisissant soit une racine exacte du polynôme (si elle(s) existe(nt)) ou bien, un intervalle. Le choix de la condition initiale, notée  $y_0$  dans le programme constitue le choix déterminant le type d'orbite obtenue. D'ailleurs, le programme donne le type d'orbite obtenue, avant de tracer le graphe grâce aux analyses effectuées avec le programme, en parallèle des informations fournies par la thèse d'Hackmann.

Viens ensuite le moment de se pencher sur la résolution de l'équation différentielle. Cependant, nous avons constaté que l'équation 9.1 s'avérait non optimale pour l'étude numérique

---

4. Pour plus d'informations, voir la thèse de Eva Hackmann.

de nos trajectoires.

En conséquence, nous nous sommes donc inspirés de la thèse d'Hackmann pour réécrire l'équation maîtresse en fonction des paramètres physiques  $E^2$  et  $L$  de façon à agir directement sur leur valeur (plutôt que d'utiliser les variables  $\mu$  et  $\lambda$ ).

### Mise en place d'une nouvelle équation

Ainsi, en reprenant l'équation 7.17 et en effectuant le changement de variable suivant :

$$u = \frac{M}{r}$$

nous obtenons alors :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{M}{L^2} \left[ E^2 - \epsilon - \frac{L^2}{M^2} u^2 + \frac{r_s \epsilon}{M} u + \frac{r_s L^2}{M^3} u^3 + \frac{M^2}{3} \Lambda \epsilon \frac{1}{u^2} + \frac{1}{3} \Lambda L^2 \right] \quad (9.6)$$

Puis, en redéfinissant certains paramètres comme  $\bar{L} = \frac{M^2}{L^2}$  et le  $\bar{\Lambda} = \frac{1}{3} \Lambda M^2$  pour finalement obtenir l'équation suivante :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r_s}{M} u^3 - u^2 + \frac{r_s}{M} \epsilon \bar{L} u + \bar{L} \epsilon \bar{\Lambda} \frac{1}{u^2} + (\bar{L}(E^2 - \epsilon) + \bar{\Lambda}) \quad (9.7)$$

Dans le programme du tracé des orbites, nous effectuerons la simplification de calcul suivante :  $r_s = 2M$  car, on le rappelle, les paramètres  $G$  et  $c$  sont définis comme égaux à 1. Dès lors, l'équation 9.7 se simplifie de la manière suivante :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2u^3 - u^2 + 2\epsilon \bar{L} u + \bar{L} \epsilon \bar{\Lambda} \frac{1}{u^2} + (\bar{L}(E^2 - \epsilon) + \bar{\Lambda}) \quad (9.8)$$

### Résolution numérique de l'équation différentielle

Nous utilisons la fonction Matlab la plus connue pour résoudre des systèmes différentiels, `ode45` dont l'algorithme est écrit suivant une méthode de résolution mathématique de Runge-Kutta d'ordre quatre.

Nous traçons enfin l'horizon du rayon de Schwarzschild  $r_s = 2$  dans notre cas simplifié, afin d'étudier le comportement de nos particules test lorsqu'elles passent ou non, près de cet horizon.

## 9.5 Résultats obtenus sans constante cosmologique ( $\Lambda = 0$ )

Notre programme nous a permis d'obtenir les mêmes orbites que celles présentes dans la thèse d'Eva Hackmann. Comme nous le verrons, en fonction des paramètres  $E^2$  et  $\bar{L}$ , nous obtenons différents types d'orbites. Différencions dans un premier temps, les deux types de particules test avec ou sans masse.

### 9.5.1 Cas d'une particule sans masse

Les résultats suivants sont valables dans le cas d'une particule sans masse, c'est à dire pour un photon (i.e.  $\epsilon = 0$ ).

Nous constatons que, pour une particule massive, nous n'obtenons seulement que trois types d'orbites. Des orbites de capture terminale (correspondant à zéro racine de polynôme, région 0) comme le montre la figure 9.4.

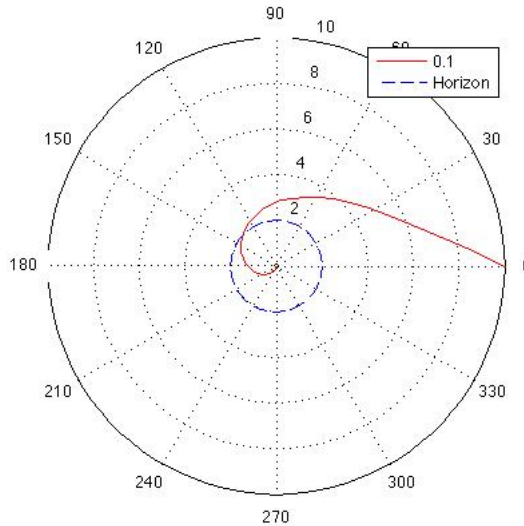


FIGURE 9.4 – Trajectoire de capture terminale pour  $E^2 = 0,5$  et  $L = 1/9$  en l'absence de constante cosmologique.

Des orbites vol et terminales pour la figure 9.5 correspondant à deux racines de polynôme (région III).

Dans le cas de la figure 9.5, la particule subit toujours le potentiel gravitationnel de l'astre central mais conserve une trajectoire circulaire autour de l'horizon. Ce type de trajectoire est bien évidemment directement reliée à l'influence de la condition initiale  $y_0 = u_0$  sensiblement plus faible dans ce cas. Cependant, la distance radiale initiale est égale à l'inverse de  $u_0$  donc nous obtenons une trajectoire de type vol dans le cas où l'on lance la particule d'un rayon plus important que dans le cas précédent. L'interprétation physique est bien cohérente avec nos observations.

On s'aperçoit donc bien que le photon est soumis au potentiel gravitationnel d'après la figure 9.5 créé par le corps central dans le cas d'une orbite terminale. En effet, lorsque la particule s'approche de l'horizon de Schwarzschild du corps central, celle-ci y est attirée et tombe inexorablement vers la singularité comme l'on peut s'y attendre dans une approche générale relativiste.



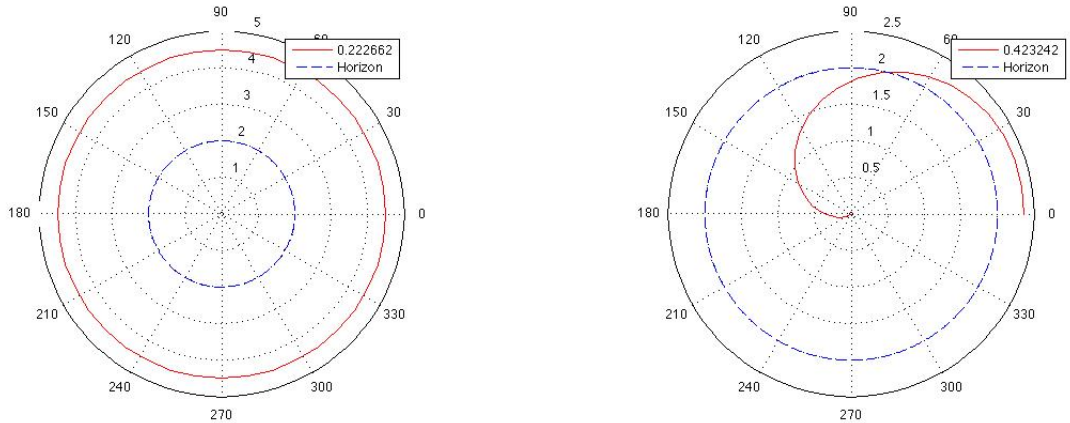


FIGURE 9.5 – Trajectoire de vol (à gauche) et terminale (à droite) pour  $E^2 = 1,1$  et  $L = 0,025$  en l’absence de constante cosmologique.

### 9.5.2 Cas d’une particule massive

A présent, nous considérons une particule massive (i.e.  $\epsilon = 1$ ) et nous pourrions donc effectuer un recoupement avec l’illustration ?? en fonction des paramètres  $\mu$  et  $\lambda$ . Nous choisirons donc les paramètres adéquats pour étudier les différentes régions.

**Région I** Considérons le type de région I correspondant au cas où nous n’avons aucune racine. Nous obtenons le résultat de la figure 9.6.

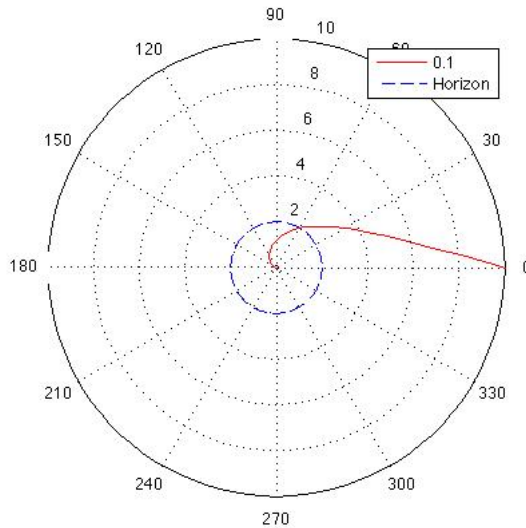


FIGURE 9.6 – Trajectoire de capture terminale pour  $E^2 = 2$  et  $L = 1/9$  en l’absence de constante cosmologique.

La particule test arrive à l’horizon avec une énergie assez importante ( $E^2 = 2$ ) ce qui nous permet d’apprécier une longue distance en ligne droite avant sa chute dans l’horizon

de Schwarzschild. Ce type de trajectoire est appelée *Trajectoire de capture terminale*. Le nom *capture* sert à rendre compte du caractère légèrement courbé de la trajectoire après une distance parcourue en ligne droite mais sans avoir tourné au tour de l'horizon avant sa chute.

**Région II** Considérons le type de région II correspondant au cas où nous avons une racine. Nous obtenons les résultats de la figure 9.7.

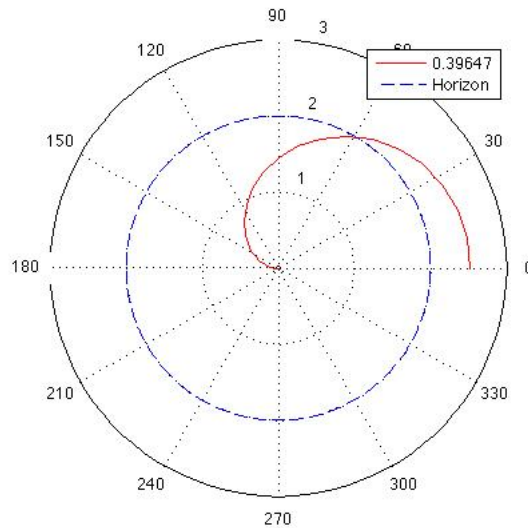


FIGURE 9.7 – Trajectoire terminale pour  $E^2 = 0,5$  et  $L = 1/9$  en l'absence de constante cosmologique.

Nous obtenons ici une trajectoire terminale classique de la particule massive qui chute jusqu'à la singularité de l'astre central.

**Région III** Considérons le type de région III correspondant au cas où nous avons deux racines. Nous obtenons les résultats de la figure 9.8.

Comme dans le cas d'une particule sans masse, le choix de la condition initiale qui rend la distance radiale initiale plus importante que le deuxième cas évoqué ci-après, permet d'obtenir une trajectoire de type *vol* pour la figure 9.8, c'est à dire que la particule a une trajectoire déviée à cause du potentiel gravitationnel de l'astre central mais sans tomber vers la singularité.

En revanche, ce n'est pas le cas pour la figure de droite 9.8 pour laquelle nous obtenons une particule test qui tombe au centre de l'horizon dû à une distance radiale plus faible que précédemment.

**Région IV** Considérons le type de région IV correspondant au cas où nous avons trois racines. Nous obtenons les résultats de la figure 9.9.

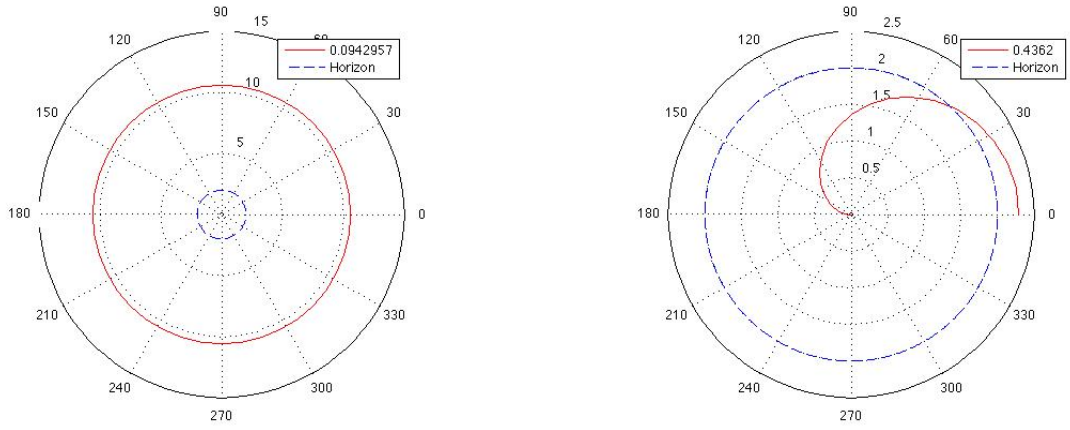


FIGURE 9.8 – Trajectoire de vol (à gauche) et terminale (à droite) pour  $E^2 = 1,1$  et  $L = 0,025$  en l'absence de constante cosmologique.

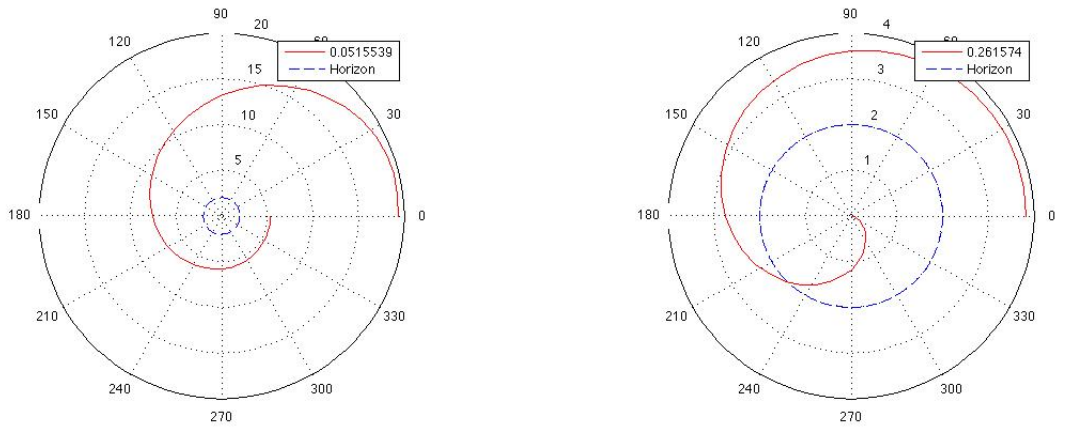


FIGURE 9.9 – Trajectoire de circulaire (à gauche) et terminale (à droite) pour  $E^2 = 0,93$  et  $L = 0,072$  en l'absence de constante cosmologique.

Dans le cas de la figure de gauche 9.9, nous obtenons une trajectoire dite *circulaire*, différente des trajectoires de type *vol*. En effet, dans le présent cas, nous nous apercevons bien que la particule tourne autour de l'astre central en plus d'être déviée à cause de son influence gravitationnelle.

Dans les précédents cas de trajectoires de type *vol*, nous n'avions pas d'enroulement autour de l'horizon à proprement parler. Nous ne pouvons pas en déduire une trajectoire circulaire d'enroulement donc, contrairement au présent cas.

Enfin, avec la figure de droite 9.9, nous obtenons de nouveau une trajectoire terminale pour une valeur initiale de distance radiale plus faible et qui, par conséquent, conduit inexorablement à une chute fatale vers la singularité.

### 9.5.3 Trajectoires applicables à l'anomalie Pioneer

Comme nous l'avons détaillé en introduction de ce mémoire, nous souhaitons modéliser la trajectoire des sondes Pioneer à la périphérie des systèmes planétaires que constituent les planètes Jupiter et Saturne. L'anomalie Pioneer a été détectée après dérive de la sonde dans le système solaire.

Par conséquent, il sera naturel d'exiger des trajectoires de types *vol* ou *circulaire* (tolérance maximum) pour traduire l'influence du facteur gravitationnel. Cependant, nous prendrons garde à ne pas considérer des orbites terminales qui ne seraient en aucun accord avec la situation physique du problème traité.

Dans le chapitre suivant, nous en viendrons à l'application du problème en analysant l'influence de la constante cosmologique sur nos trajectoires, avant d'appliquer toutes nos observations à l'anomalie Pioneer.

# Chapitre 10

## Influence de la constante cosmologique

Maintenant que nous avons modélisé notre trajectoire pour des particules test sans constante cosmologique  $\Lambda$ , nous passons à son introduction dans les mêmes programmes étudiés précédemment. Comme nous l'avons vu, ceux-ci prenaient déjà en compte la constante cosmologique que nous avons prise nulle pour tous les résultats précédents.

Dès lors, il ne nous reste plus qu'à présenter dans un premier temps les différences observées pour certains types d'orbites si l'on prend en compte cette constante. Nous détaillerons ensuite les derniers codes programmés sous Matlab et Maple, afin de retrouver les valeurs obtenues par Hackmann et Lämmerzahl dans leur article pour discuter de l'influence réelle de cette constante.

### 10.1 Modifications des trajectoires observées

Nous travaillons toujours avec le même programme que précédemment (i.e. `plots of orbits.m`) et analysons l'influence du paramètre cosmologique par rapport aux précédentes trajectoires. Nous prendrons arbitrairement la valeur de  $\frac{1}{3}10^{-5}$  pour  $\Lambda$  afin de noter son influence visible sur les trajectoires, si elle existe.

#### 10.1.1 Influence sur les orbites terminales

Prenons le cas d'une particule avec une énergie  $E^2 = 0,96$  et  $L = 1/9$  qui nous donnait une orbite terminale sans constante cosmologique comme le montre la figure 10.1.

En présence de  $\Lambda = \frac{1}{3}10^{-5}$  (i.e. pour un espace-temps de Schwarzschild-de-Sitter), nous obtenons une orbite de capture terminale, sensiblement différente comme nous le montre la figure 10.2.

En revanche, dans le cas où nous prenons la constante cosmologique  $\Lambda = -\frac{1}{3}10^{-5}$  (i.e. pour un espace-temps de Schwarzschild-(anti-)de Sitter), la différence est très faible avec le cas  $\Lambda = 0$  et nous ne voyons aucune différence de trajectoire<sup>1</sup> à l'oeil nu d'après la figure 10.2.

---

1. Notons l'influence de la constante cosmologique pour le *départ* de la particule qui se fait à une distance radiale plus éloignée. Cette différence importe peu dans notre étude.

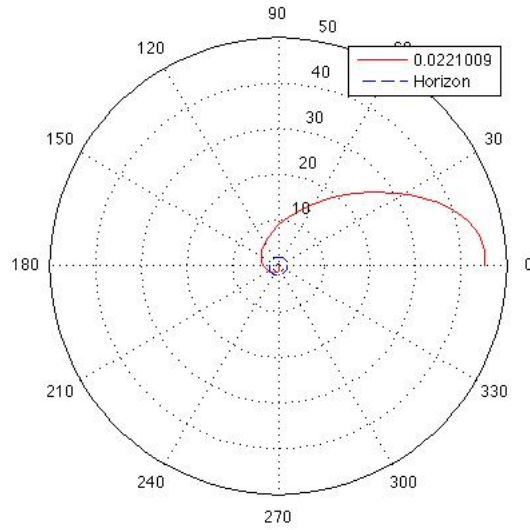


FIGURE 10.1 – Trajectoire de capture terminale pour  $E^2 = 0,96$  et  $L = 1/9$  pour  $\Lambda = 0$ .

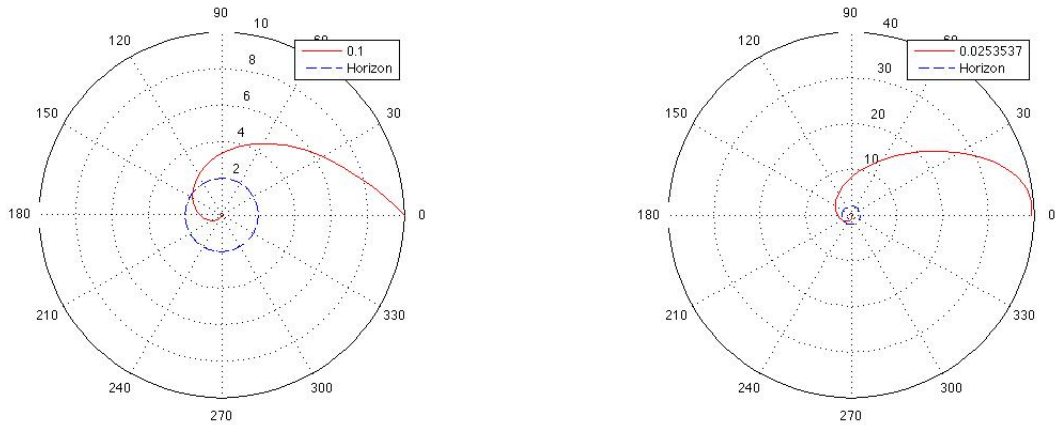


FIGURE 10.2 – Trajectoire de capture terminales pour  $E^2 = 0,96$  et  $L = 1/9$  pour  $\Lambda = +\frac{1}{3}10^{-5}$  (à gauche) et  $\Lambda = -\frac{1}{3}10^{-5}$  (à droite)

Nous pouvons facilement conclure que l'influence de la constante cosmologique se fait évidemment ressentir lors de son introduction dans les équations. De plus, une constante cosmologique positive induit une variation des trajectoires de la particule tandis qu'une constante cosmologique négative n'en entraîne pratiquement pas ou, du moins, invisible à l'oeil nu, sur nos graphiques<sup>2</sup>.

2. Nous verrons qu'il existe une différence infinitésimale de trajectoire lorsque l'on travaille dans un espace-temps de Schwarzschild-(anti-) de Sitter.

### 10.1.2 Influence sur les orbites circulaires

Cette partie là se rapproche plus de notre problème comme nous l'avons vu plus haut. En effet, pour mesurer l'influence de la constante cosmologique dans notre problème, nous nous contenterons de travailler uniquement avec des orbites vol ou circulaires.

Reprenons l'étude précédente d'une particule test massive munie des paramètres physiques  $E^2 = 0,93$  et  $L = 0,072$ . Sans constante cosmologique, nous obtenions une trajectoire circulaire comme le montrait la figure 9.9.

A présent, appliquons ce même modèle pour  $\Lambda = \frac{1}{3}10^{-5}$  et nous obtenons la figure 10.3 qui présente une orbite de vol. On remarque que le rayon de Schwarzschild est très petit. Rappelons en effet que c'est ce qui nous indique qu'il s'agit d'une trajectoire de vol (et non circulaire où l'influence gravitationnelle est plus forte).

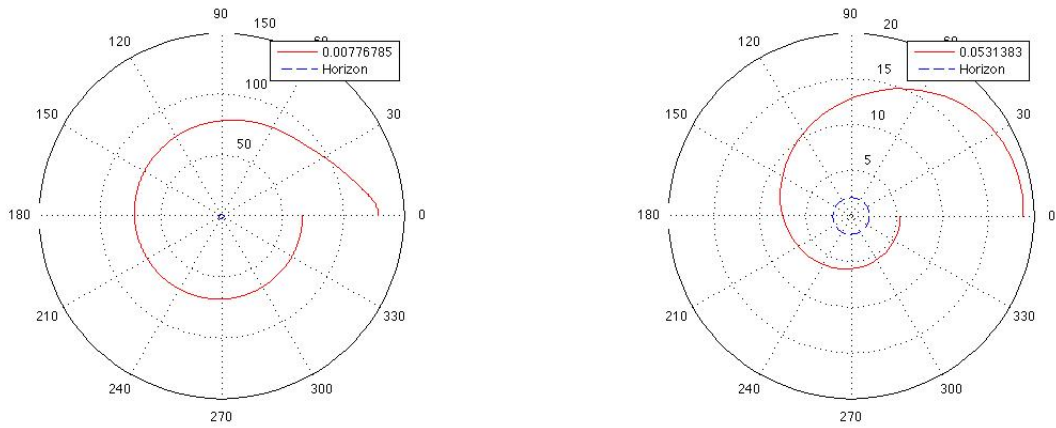


FIGURE 10.3 – Trajectoires vol et circulaire pour  $E^2 = 0,93$  et  $L = 0,072$  pour  $\Lambda = +\frac{1}{3}10^{-5}$  (à gauche) et  $\Lambda = -\frac{1}{3}10^{-5}$  (à droite)

En revanche, dans le cas où  $\Lambda = -\frac{1}{3}10^{-5}$ , l'influence de la constante cosmologique est sensiblement nulle à l'oeil nu d'après la figure 10.3 (comme dans le cas précédent). Nous ne pouvons donc rien en conclure avec cette modélisation.

Encore une fois, nous nous rendons compte de l'influence importante de la constante cosmologique dans un espace-temps de Schwarzschild. Cependant, celle-ci n'est conséquente d'un point de vue des trajectoires que dans le cas où elle est strictement positive.

L'étude détaillée dans le chapitre suivant permettra d'évaluer l'influence réelle de la constante cosmologique dans un espace-temps de Schwarzschild-(anti-)de Sitter.

## 10.2 Analyse numérique des données des sondes Pioneer

Nous appliquons désormais nos modèles au cas physique de l'anomalie Pioneer. Le lecteur comprendra aisément que la partie la plus importante de cette partie sera de rentrer les valeurs physiques obtenues, dans le programme.

Comme les auteurs Hackmann et Lämmerzahl, nous utiliserons les travaux de M. Nieto and J. Anderson, *Classical Quantum Gravity* 22, 5343 (2005), pour nos modèles. En effet, d'après cet article, nous sommes en mesure de donner les valeurs des différents paramètres à utiliser.

### 10.2.1 Paramètres de l'étude

Tout d'abord, nous devons changer d'équation maîtresse pour le programme Matlab que nous utiliserons. En effet, l'équation 9.8 nous sera utile afin de pouvoir spécifier le rayon de Schwarzschild appliqué à notre problème. Notons également que le programme utilisé n'est que le dérivé du programme du tracé des orbites qui résout l'équation différentielle nous retournant les valeurs des paramètres  $u$  et  $\varphi$ .

De plus, nous utiliserons les valeurs suivantes, en accord avec les données de l'article mentionné :

- La valeur de  $GM$  définie par :  $GM = 1.00000565k^2$  avec la constante de Gauss notée  $k = 0.01720209895$ .
- La valeur de la constante universelle de gravitation  $G = 6.674286710^{-11}$ .
- La vitesse de la lumière dans le vide prise  $c = 299792485$ .
- Le rayon de Schwarzschild dont la définition n'a pas changé  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ .

Reste enfin à savoir sur quel domaine spatial nous voulons étudier le voyage de la sonde pour s'apercevoir de l'influence du paramètre cosmologique sur sa trajectoire. Toujours d'après l'article qui nous permet d'obtenir ces données, l'anomalie Pioneer apparaîtrait pour des distances de 20 à 70 AU à partir du Soleil. Ceci correspond également à une intervalle d'angles compris entre  $0, 4\pi$  et  $0, 6\pi$ .

### 10.2.2 Résultats attendus

Notre but ici est de retrouver les analyses effectuées par Hackmann et Lämmerzahl, voire de les affiner. D'après leur modélisation, si nous analysons la variation angulaire de trajectoire due à l'influence de la constante cosmologique  $\Lambda$ , nous devrions obtenir une différence de l'ordre de  $10^{-18}$  radians pour Pioneer 10 et  $10^{-19}$  radians pour Pioneer 11, ce qui correspond à une variation de distance radiale de l'ordre de  $10^{-5}m$  pour Pioneer 10 et  $10^{-4}m$  pour Pioneer 11.

Nous cherchons à confirmer ces résultats avec notre propre méthode de programmation à l'aide des outils informatique Matlab et Maple que nous détaillerons dans la prochaine section.

### 10.2.3 Utilisation du programme Matlab

Nous rappelons que le programme Matlab utilisé est bien un dérivé du programme `plots of orbits.m` qui calculera les solutions de l'équation différentielle bien connue avec et sans prise en compte de la constante cosmologique.

Il suffit ensuite d'effectuer une différence entre les deux vecteurs obtenus `PHI2` et `PHI1` pour en déduire la variation d'angle lorsque l'on prend en compte l'influence de  $\Lambda$ .



**Problème rencontré durant la modélisation** La principale difficulté de cette modélisation fut d'obtenir des résultats aussi précis que l'ordre de grandeur des variations données dans l'article de Hackmann et Lämmerzahl. En effet, nous sommes limités par la précision de Matlab<sup>3</sup> ainsi que par celle de la machine sur laquelle s'effectue les calculs.

Nous avons donc pris la liberté de modifier les paramètres du problème. Le plus évident semblait être de modifier la distance sur laquelle nous travaillions. Il était bien question de prise en compte d'une distance de parcours de sonde située entre  $0,4\pi$  et  $0,6\pi$ . Nous avons donc modélisé une distance infinitésimale de distance c'est à dire en effectuant les calculs entre  $0,5999999999999999\pi$  et  $0,6\pi$ . Ainsi, nous nous sommes affranchis de la difficulté de modélisation évoquée ci-dessus.

Cependant, nous avertissons le lecteur de noter les résultats suivants avec un certain recul. Les ordres de grandeurs seront significatifs à  $10^{-2}$  près pour éviter de trop grandes sources d'erreurs.

## Résultats obtenus

**Variation angulaire** Lorsque nous effectuons le calcul numérique avec le programme Matlab pour la sonde<sup>4</sup> Pioneer 10, nous sélectionnons bien une orbite de type *vol* avec un nombre de racines de polynôme égal à 2 :

```
Choix de la sonde Pioneer 10 (10) ou 11 (11) ? : 10
Facteur de la constante cosmologique facteur^10^(puissance) : -1/3
Valeur de la puissance de la constante cosmologique : -45
Constante cosmologique négative.
Lambda =
  -2.18412981614097e-033
Nombre de zéros du polynôme :
  2.000000000000000e+000
Zéros du polynôme :
  1.03929688985249e-009    673.296923718270e+024
```

```
Choisissez-vous une racine (y) ou un intervalle (n) ? y
Entrer le numéro de la racine que vous utiliser : 1
Flyby orbit.
Nombre de zéros du polynôme :
  2.000000000000000e+000
Zéros du polynôme :
  1.01037965616468e-009    673.296923718270e+024
Choisissez-vous une racine (y) ou un intervalle (n) ? y
Entrer le numéro de la racine que vous utiliser : 1
Flyby orbit.
```

---

3. Le plus petit nombre manipulable dans Matlab est donné en utilisant la fonction `eps`. Nous obtenons la valeur de  $222.044604925031e - 018$ .

4. Dans le programme, nous laissons à l'utilisateur le choix des sondes Pioneer 10 et 11. Le programme est conçu pour sélectionner les paramètres utiles en fonction du type de sonde.



0.55508984016226628772475802814245823329919067093839e-5

soit un ordre de grandeur de  $10^{-5}$  en moyenne.

Et dans le cas de la sonde Pioneer 11, nous retrouvons les mêmes ordre de grandeur avec, par exemple :

0.000011398439512814819715029322966377914505376887500292

soit un ordre de grandeur de  $10^{-5}$  en moyenne.

**Validité des résultats obtenus** Nous obtenons bien une variation de distance radiale du même ordre de grandeur que celles évoquées dans l'article de Hackmann et Lämmerzahl, conformément à nos attentes. L'erreur est toujours de l'ordre de  $10^{-1}$  environ si l'on n'effectue pas de moyenne de valeurs obtenues pour les composantes de notre vecteur<sup>9</sup>.

Il est facile de se douter que l'erreur d'approximation des ordres de grandeurs que nous obtenons est, en grande partie, due à l'utilisation d'une équation maîtresse différentielle. Il est évident que l'utilisation des outils de mathématiques différentielles rend les résultats obtenus bien plus précis. Cependant, ce n'est pas la vocation du présent mémoire qui propose une méthode plus rapide et plus simple, pour un résultat sensiblement proche de l'original et, en s'affranchissant d'outils mathématiques compliqués à manipuler.

---

9. Sans compter le recul à prendre lors de l'étude de ces données numériques

# Chapitre 11

## Conclusions et perspectives

Pour terminer ce mémoire, nous discuterons dans un premier temps du caractère raisonnable, ou non, de la prise en compte de la constante cosmologique  $\Lambda$  pour ensuite enchaîner sur les ouvertures possible à cette étude.

### 11.1 La constante cosmologique

Après les modélisations effectuées avec l’outil informatique et ce, sous plusieurs logiciels de calculs, nous avons retrouvé sensiblement les mêmes ordres de grandeurs que ceux de l’article écrit par Hackmann et Lämmerzahl. En effet, nous obtenons par exemple pour Pioneer 10, une variation angulaire de l’ordre de  $10^{-17}$  radians alors qu’il faudrait obtenir  $10^{-18}$  radians. Idem pour la variation de distance radiale ; nous obtenons une différence de l’ordre de  $10^{-5}$  en moyenne, comme indiqué dans l’article.

Nous avons donc atteint notre objectif de re-démontrer les formules de l’article et d’arriver jusqu’à l’obtention de la variation des variables  $r$  et  $\varphi$  en fonction de la prise en compte, ou non, de la constante cosmologique. Notons cependant que les résultats que nous avons obtenus sont moins précis que ceux de l’article principalement dus à la limitation informatique et à l’imprécision engendrée par la modélisation grâce à la résolution d’une équation différentielle.

Après ce travail, nous pouvons émettre notre avis sur l’utilité de la prise en compte de la constante cosmologique comme pouvant expliquer l’anomalie Pioneer. Il est clair, tout d’abord, que la variable temporelle est influencée de la même manière par  $\Lambda$  comme c’est le cas pour la distance radiale  $r$ . Comme l’accélération de la sonde peut-être calculée comme la dérivée seconde de la distance radiale par rapport au temps (i.e.  $\frac{d^2r}{dt^2}$ ), nous en déduisons que nous sommes effectivement très loin des  $\sim 10^{-10}m.s^{-2}$  obtenus par les ingénieurs.

En conséquence, nous faisons les mêmes conclusions que les auteurs de l’article, l’ordre de grandeur de la variation de distance radiale et angulaire due à la prise en compte de la constante cosmologique dans un espace-temps de Schwarzschild-(anti-) de Sitter n’explique pas l’anomalie Pioneer à la vue des ordres de grandeurs relativement faibles.

## 11.2 Ouvertures

A l'heure actuelle, il est tout à fait légitime de se demander quelles peuvent être les autres causes expliquant cette anomalie d'accélération que subissent les sondes Pioneer. Comme nous l'avons vu en introduction du mémoire, les causes principales ont été évoquées et l'implication de la modélisation de l'espace-temps relativiste semble une piste visiblement viable.

Mais, dans ce cas, il serait utile de reconsidérer la valeur de la constante cosmologique qui est très mal connue à l'heure actuelle. La valeur avec un ordre de grandeur de  $10^{-45} km^2$  utilisée dans notre étude n'est donc peut-être pas la bonne à utiliser. Il serait utile d'effectuer un travail plus en profondeur sur la valeur de cette constante que l'on pourrait déterminer indirectement à l'aide des données provenant d'autres missions. Seulement, cela nécessite l'accès à des instruments monstrueusement précis que ne possèdent malheureusement pas tous les milliers de satellites et de sondes.

Autre piste que l'on peut explorer, la prise en compte d'un espace-temps modélisé avec plus de précision comme le sont les espace-temps Reissner-Nördström et les espaces-temps à dimensions supérieures. Il y a ici un travail intéressant à effectuer pour étudier de nouveau l'effet de la prise en compte de la constante cosmologique sur les résultats obtenus.

A l'occasion du stage effectué au CESR, il nous a été donné l'occasion de rencontrer Monsieur Slava Turyshev en personne à l'occasion d'une conférence qu'il donnait à l'Observatoire Midi-Pyréennée de Toulouse (OMP). Il a avancé une autre hypothèse très intéressante dont il parle très peu dans son article sur l'anomalie Pioneer [3]. En effet, il serait très intéressant d'étudier l'influence de la dégradation du matériau des sondes ces quarantes dernières années, sur leur trajectoire. D'après la troisième loi de Newton, nous savons que l'éjection de matière dans l'espace provoque une réaction de même intensité et de sens opposé. Dès lors, l'éjection d'atomes de surface sur de longues années pourrait être à l'origine d'une accélération aussi faible que celle détectée par l'anomalie Pioneer.

Pour terminer, nous pouvons évoquer l'idée de la prise en compte de l'énergie noire et/ou de la matière noire dans nos modèles. Le problème, c'est que nous n'avons que très peu d'informations à l'heure actuelle dans cette branche de la physique (i.e. la cosmologie). De plus, nous devons aussi avoir en tête que l'action de ces énergies noires agirait uniquement à des distances colossales, ce qui n'est pas le cas ici (nous évoluons uniquement dans le système solaire). Mais sa prise en compte peut être intéressante quand nous regardons l'ordre de grandeur terriblement faible de l'anomalie Pioneer.

Dans tous les cas, l'anomalie d'accélération de l'anomalie Pioneer n'a toujours pas été résolue actuellement. A mon avis, les pistes les plus crédibles sembleraient être des causes d'ingénierie pur. En effet, nous travaillons avec les données de sondes qui ont maintenant quarante ans et que les ingénieurs de la NASA ne contrôlent plus. Cependant, il est vrai que l'influence de paramètres cosmologiques ne sont malgré tout à ne pas écarter totalement puisque nous en connaissons assez peu finalement, sur notre Univers.

Ce sujet de recherche est passionnant et donnera sûrement lieu à l'écriture de nombreux articles scientifiques dans les années à venir pour tenter d'expliquer cette anomalie d'accéléra-

tion de sondes. Les retombées pourraient être gigantesques si un nouveau phénomène physique venait à être mis en évidence. Le cas échéant, la connaissance précise de cette anomalie permettrait une meilleure précision des calculs pour l'envoi et le contrôle de nos sondes spatiales et, par conséquent, un meilleur contrôle sur nos outils d'explorateur de l'Univers ...

### 11.3 Bilan du stagiaire

Ce stage au Centre d'Etudes Spatiale des Rayonnements fut le premier stage de recherche théorique qu'il m'ait été donné d'effectuer. Après une très brève appréhension devant la phrase "*Attention ce sujet passionnant demande un bon investissement en mathématiques*" que l'on pouvait lire sur le document de présentation du stage, mon engouement fut rapidement retrouvé devant un sujet théorique appliqué à un domaine qui me passionne, l'astrophysique. Le fait de travailler également avec Dominique Toublanc que je connaissais de la L3 Physique Fondamentale lorsqu'il nous donnait des cours de méthodes numériques, fut une motivation supplémentaire car nous avions déjà sympathisé déjà à l'époque.

La première partie de ce stage m'a énormément apporté d'un point de vue méthodologique et dans l'apprentissage des mathématiques appliquées à la physique de la relativité générale. En effet, je n'avais jamais eu l'occasion d'aborder ce domaine qui n'est pas enseigné dans le cursus de physique fondamentale. Depuis 2004, la relativité générale m'intéressait d'après les concepts généraux que je connaissais déjà. J'ai pu assouvir mon souhait pendant une semaine et demie où j'ai étudié seul avec des livres et l'aide de documents internet, les rudiments de relativité générale. Cette partie m'a beaucoup enrichi et m'a permis de me rendre compte que j'avais à ma disposition, grâce à mon cursus, les outils et réflexes globaux pour appréhender un domaine de la physique en autodidacte.

L'autre moitié de mon stage a consisté en la modélisation des trajectoires de particules test dans un espace-temps précis (celui de Schwarzschild-(anti-)de Sitter et m'a également permis de m'améliorer en programmation que ce soit, avec le logiciel de calcul numérique Matlab ou de calcul formel, Maple. J'ai pu progresser également dans ce domaine qui m'a également passionné. Il n'était pas rare que je sois en train de travailler à mon programme jusqu'à deux heures du matin parfois pour régler des problèmes de codes tellement le sujet était intéressant.

Mon encadrant de stage, Dominique, m'a suivi tout au long de ces travaux en vérifiant que j'atteignais bien les objectifs en temps voulu afin de pouvoir tirer quelques résultats de mes études de relativité générale, appliqués au sujet principal du stage : l'anomalie Pioneer. Il a toujours été là pour vérifier l'avancement de mes travaux et la motivation qu'il me témoignait m'a toujours servi pour aller de l'avant et creuser le sujet le plus possible. J'ai su apprécier son travail discret mais terriblement efficace durant mon stage de sept semaines.

Pour terminer, cette expérience professionnelle m'a surtout permis de m'apercevoir, une nouvelle fois, que la recherche me passionne énormément. Néanmoins, si il m'est possible de travailler sur des sujets théoriques en rapport avec l'astrophysique, c'est avec passion que j'effectue mes travaux qui, au-delà de l'étude mathématique très intéressante, me permettent d'assouvir ma soif de connaissance sur des sujets de recherche actuels ...

## 11.4 Remerciements

Je tiens à remercier en priorité mon encadrant de stage, Dominique Toublanc pour m'avoir accepté en stage de recherche et m'avoir permis de travailler sur ce sujet passionnant qu'est l'anomalie Pioneer. Je le remercie également pour toutes les discussions que nous avons eues dans le bureau 153 de sujets divers et variés, allant de l'informatique aux grands-prix de Formule 1. Un échange humain très enrichissant avant tout ...

Pour les courriels échangés lors de l'étude de son article, je remercie vivement Madame Eva Hackmann, auteur de l'article que j'ai eu la chance et le plaisir d'étudier dans ce mémoire. Les échanges que nous avons eu m'ont permis de mieux comprendre certains aspects mathématiques, nécessaires au développement des programmes.

Merci également à mes Amis Julien Dupré de Baubigny et Arnaud Beth avec qui j'ai partagé de très nombreuses pauses en plein milieu d'après-midi pour souffler entre deux calculs. Et Arnaud pour ses conseils mathématiques, sa relecture de mon rapport pour vérifier la partie mathématique et les moments passés ensemble ces quelques mois. J'en profite pour également remercier les étudiants du M1 Astrophysique pour leur travail sur l'anomalie Pioneer, bien avant que je me penche sur la question.

Un grand merci à comité littéraire notamment Céline Barbara Pruvost qui, comme toujours, arrive à mettre à profit son talent linguiste invétérée.

Enfin je remercie ma famille et surtout ma Maman pour ses conseils littéraires et sa relecture du présent rapport.

Quatrième partie

**Annexes**



# Chapitre 12

## Programmation Matlab

### 12.1 Code du graphique $g_{tt}$ de la métrique

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Tracé de la composante gtt en fonction du rayon r %
% pour une métrique Schwarzschild-de Sitter %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc

%% Initialisation des constantes

G=1;
M=1;
rs=2*G*M; %Rayon de Schwarzschild
lambda=0; %Constante cosmologique
%lambda_value=2.5E-2; %Valeur semblable à celle de l'article
lambda_value=input('Entrez la valeur de la constante cosmologique (2.5E-2) : ');

%% Paramètres de la boucle

h=0.1; %Pas
h=input('Entrez la valeur du pas pour la précision du calcul : ');
rf=15; %Rayon final

%% Initialisation des boucles

i=0; %initialisation de l'itération i
k=0;
gtt1=0; %Initialisation de la fonction gtt
gtt2=0;
gtt3=0;
gtt4=0;
gtt5=0;
gtt6=0;
y=0;
N=rf/h; %Nombre de valeurs

%% Boucle pour la variation de lambda
r=0; %Initialisation du rayon

for i=0:N-1;

    i=i+1;
    r(i)=i*h;
```

```

for lambda=0; %Pour lambda nul
    gtt1(i)=(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2);
    plot(r,gtt1,'k--')
    hold on
end

for lambda=-lambda_value; %Pour lambda négatif
    gtt2(i)=(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2);
    plot(r,gtt2,'r-')
end

for lambda=lambda_value; %Pour lambda positif
    gtt3(i)=(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2);
    plot(r,gtt3,'g-')
end

for lambda=1/9; %Pour lambda=1/9
    gtt4(i)=(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2);
    plot(r,gtt4,'m--')
end

for lambda=1/9+2.5E-2; %Pour lambda>1/9
    gtt5(i)=(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2);
    plot(r,gtt5,'b-')
end

end

end

%% Paramètre du plot

axis([0 rf -3 3]) %On restreint la fenêtre
set(gca,'XTick',(0:1:rf));
grid %Affiche le quadrillage
title('Composante tt de la métrique de Schwarzschild-de Sitter pour plusieurs valeurs de lambda')
xlabel('Rayon r')
ylabel('Composante tt de la métrique de Schwarzschild-de Sitter')
legend('Lambda=0','Lambda<0','Lambda>0',...
    'Lambda=1/9','Lambda>1/9');

%% Intersections pour trouver r- et r+
r=0;
gtt3=0;
for lambda=lambda_value;

    gtt3=[-1/3*lambda 0 1 -rs]; %Polynôme gtt3
    z=roots(gtt3); %On cherche les racines de gtt3
    z2=find(z>0); %On trouve les indices des valeurs >0 dans z
    z3=[z(z2(1)) z(z2(2))]; %On sort les valeurs >0 de z

    rm=sort(z3); %On ressort les valeurs >0 dans l'ordre croissant
    disp('Valeurs de r- et r+ (pour lambda>0 Shwarzschild-de Sitter) : ')
    disp(['r- =',num2str(rm(1))])
    disp(['r+ =',num2str(rm(2))])

end

end

```

### 12.1.1 Graphique de $g_{tt}$

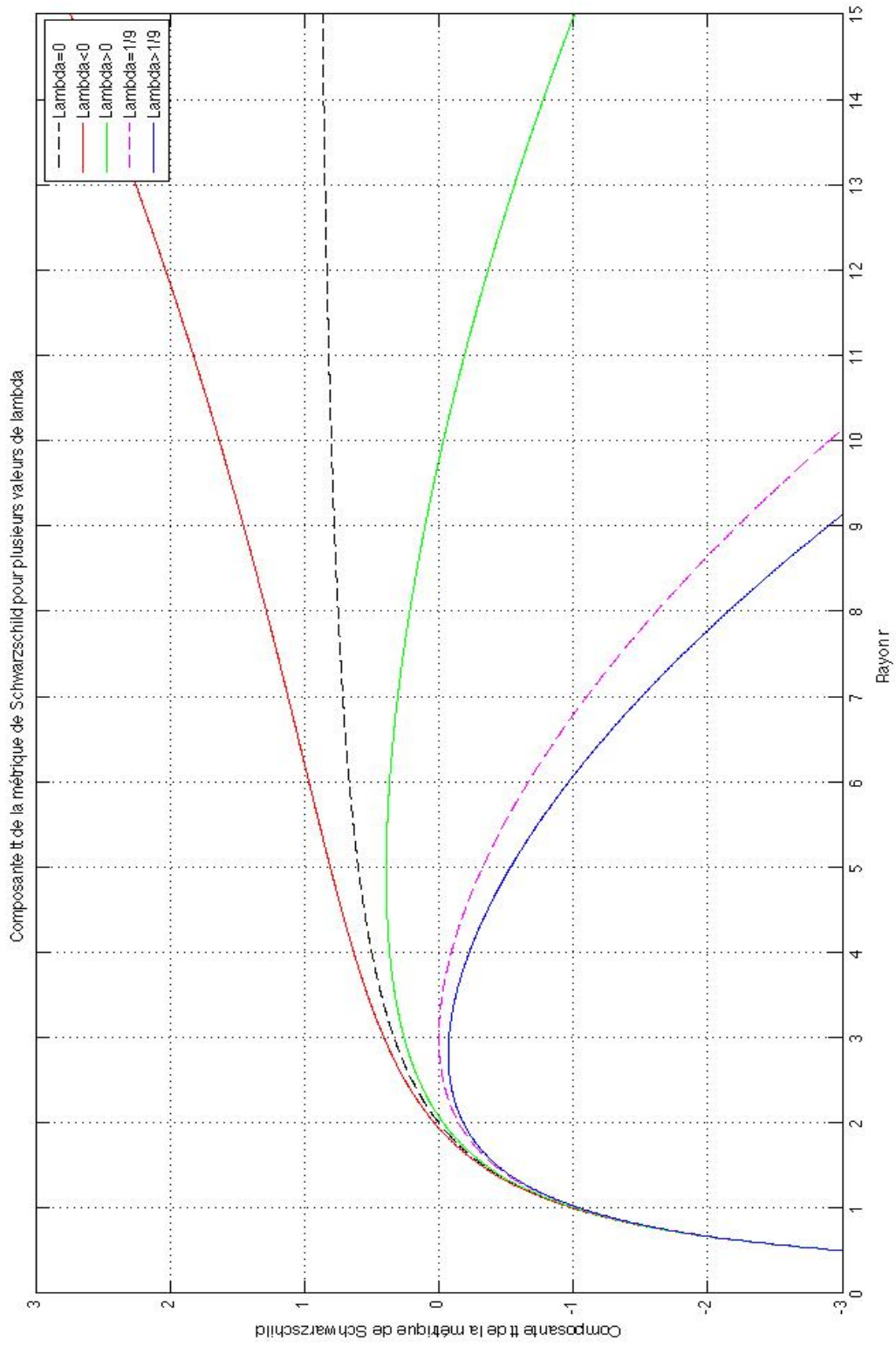


FIGURE 12.1 – Composante temporelle de la métrique de Schwarzschild pour plusieurs valeurs de la constante cosmologique  $\Lambda$

## 12.2 Code du graphique du potentiel effectif newtonien

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Tracé du potentiel effectif en fonction du rayon r %
%           pour une métrique newtonienne           %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% cf. PDF de Carroll

clear all
close all
clc

%% Initialisation des constantes

c=1;
G=1;
M=1;
p=1; %Constante epsilon (p=1 : point matériel ; p=0 : lumière)
rs=2*G*M/c^2; %Rayon de Schwarzschild

L=1; % Moment angulaire
yp=10; %Limite max. de graduation de l'ordonnée y
ym=yp; %Limite min. de graduation de l'ordonnée y

%lambda=0; %Constante cosmologique
lambda_value=2.5E-2; %Valeur semblable à celle de l'article
%lambda_value=input('Entrez la valeur de la constante cosmologique (2.5E-2) : ');

%% Paramètres de la boucle

h=0.1; %Pas (0.1)
%h=input('Entrez la valeur du pas pour la précision du calcul : ');
rf=50; %Rayon final (100)

%% Initialisation des boucles

i=0; %initialisation de l'itération i
veff1=0; %Initialisation de la fonction gtt
veff2=0;
veff3=0;
veff4=0;
veff5=0;
veff6=0;
veff7=0;
veff8=0;
veff9=0;
veff10=0;
veff11=0;
veff12=0;

N=rf/h; %Nombre de valeurs

%% Boucle pour plusieurs valeurs de p
r=0; %Initialisation du rayon

for i=01:N-1;

    i=i+1;
    r(i)=i*h;
    for p=1

        veff1(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);
        plot(r,veff1,'b')
        hold on
    end
end
```

```

for p=0
    veff2(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);
    plot(r,veff2,'r')
end

end

%% Paramètre du plot 1

axis([-1 rf -2 +2]) %On restreint la fenêtre

set(gca,'XTick',(0:5:rf));
grid %Affiche le quadrillage
title('Potentiel effectif en métrique newtonienne pour plusieurs valeurs de epsilon')
xlabel('Rayon r')
ylabel('Potentiel effectif en métrique newtonienne')
legend('Particule massive','Particule sans masse');

pause

hold off %On efface les précédents graphiques

%% Variation du paramètre L, moment angulaire :

%1) Pour une particule massive (p=1)

r=0;
p=1;

for i=0:N-1;

    i=i+1;
    r(i)=i*h;

    for L=1
        veff3(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);
        plot(r,veff3,'k')
        hold on
    end

    for L=2
        veff4(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);%-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff4,'b')
    end

    for L=3
        veff5(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);%-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff5,'g')
    end

    for L=4
        veff6(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);%-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff6,'r')
    end

    for L=5
        veff7(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);%-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff7,'m')
    end

end

end

%% Paramètre du plot 2

```

```

axis([-2 rf -2 +2]) %On restreint la fenetre

set(gca,'XTick',(0:10:rf));
grid %Affiche le quadrillage
title('Potentiel effectif en métrique newtonienne pour une particule massive')
xlabel('Rayon r')
ylabel('Potentiel effectif en métrique newtonienne')
legend('L=1','L=2','L=3','L=4','L=5');

pause

hold off

%2) Pour une particule non-massive (p=0)

r=0;
p=0;

for i=0:N-1;

    i=i+1;
    r(i)=i*h;

    for L=1
        veff8(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);
        plot(r,veff8,'k')
        hold on
    end

    for L=2
        veff9(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);%-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff9,'b')
    end

    for L=3
        veff10(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);%-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff10,'g')
    end

    for L=4
        veff11(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);%-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff11,'r')
    end

    for L=5
        veff12(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2);%-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff12,'m')
    end

end

%% Paramètre du plot 2

axis([-0.1 rf -0.1 +2]) %On restreint la fenetre

set(gca,'XTick',(0:10:rf));
grid %Affiche le quadrillage
title('Potentiel effectif en métrique newtonienne pour une particule non-massive')
xlabel('Rayon r')
ylabel('Potentiel effectif en métrique newtonienne')
legend('L=1','L=2','L=3','L=4','L=5');
    veff3(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);

```

### 12.2.1 Graphique du potentiel effectif newtonien

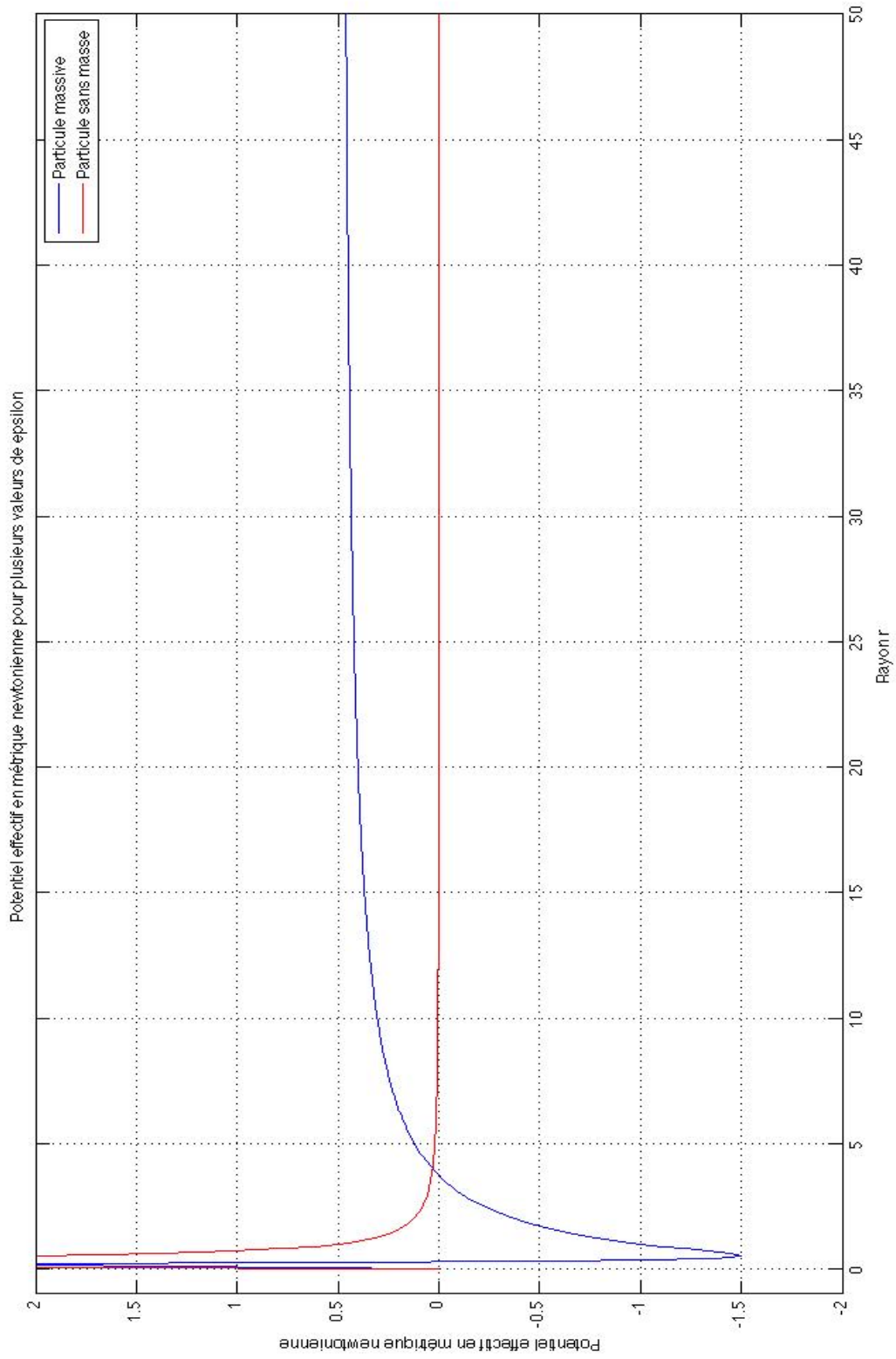


FIGURE 12.2 – Potentiel effectif en métrique newtonienne pour une particule massive et non massive



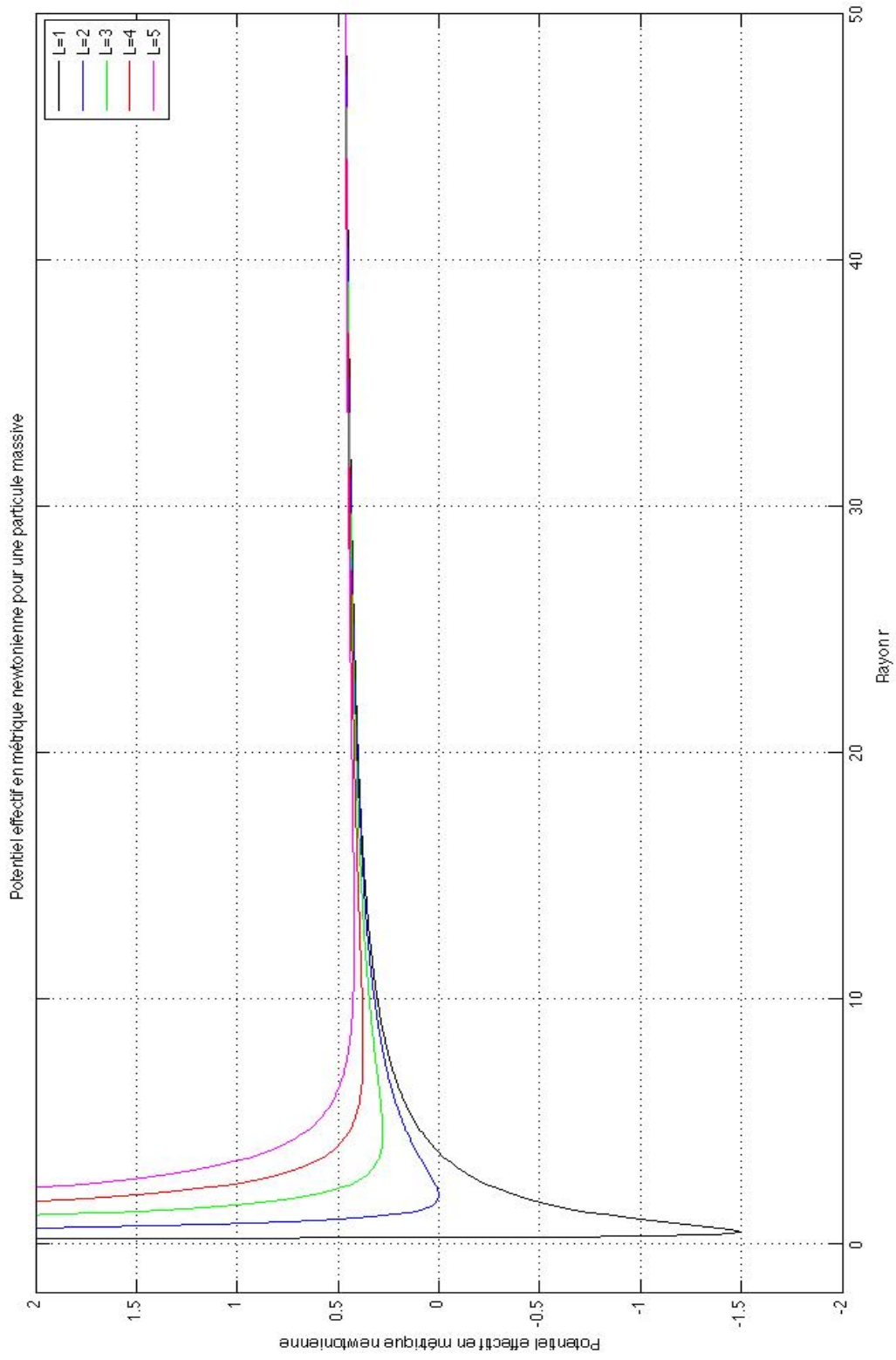


FIGURE 12.3 – Potentiel effectif en métrique newtonienne pour une particule massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$

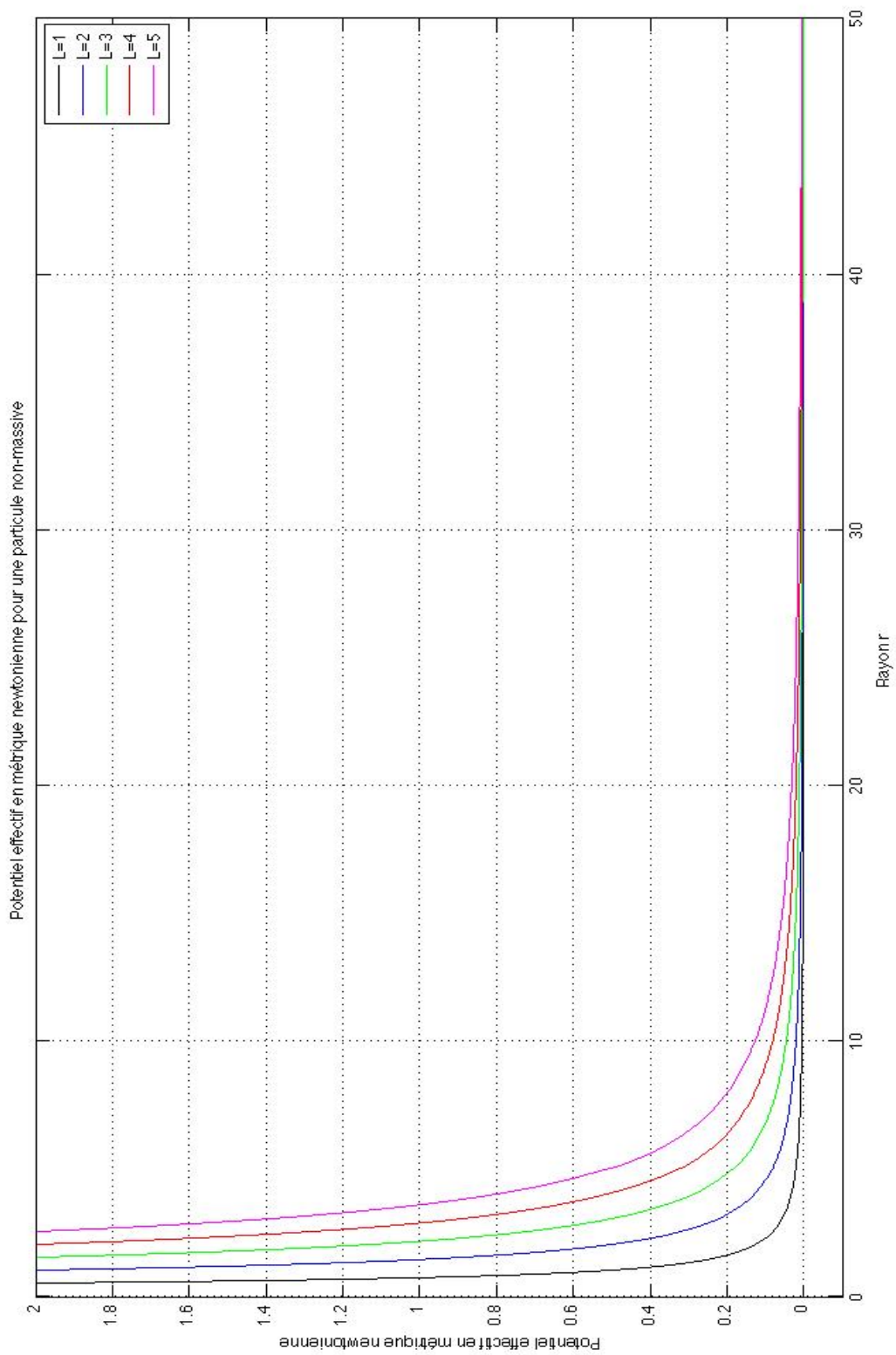


FIGURE 12.4 – Potentiel effectif en métrique newtonienne pour une particule non massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$

## 12.3 Code du graphique du potentiel effectif relativiste

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Tracé du potentiel effectif en fonction du rayon r %
%           pour une métrique relativiste           %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% cf. PDF de Carroll

clear all
close all
clc

%% Initialisation des constantes

c=1;
G=1;
M=1;
p=1; %Constante epsilon (p=1 : point matériel ; p=0 : lumière)
rs=2*G*M/c^2; %Rayon de Schwarzschild

L=1; % Moment angulaire
yp=10; %Limite max. de graduation de l'ordonnée y
ym=yp; %Limite min. de graduation de l'ordonnée y

%lambda=0; %Constante cosmologique
lambda_value=2.5E-2; %Valeur semblable à celle de l'article
%lambda_value=input('Entrez la valeur de la constante cosmologique (2.5E-2) : ');

%% Paramètres de la boucle

h=0.1; %Pas (0.1)
%h=input('Entrez la valeur du pas pour la précision du calcul : ');
rf=50; %Rayon final (100)

%% Initialisation des boucles

i=0; %initialisation de l'itération i
veff1=0; %Initialisation de la fonction gtt
veff2=0;
veff3=0;
veff4=0;
veff5=0;
veff6=0;
veff7=0;
veff8=0;
veff9=0;
veff10=0;
veff11=0;
veff12=0;

N=rf/h; %Nombre de valeurs

%% Boucle pour plusieurs valeurs de p
r=0; %Initialisation du rayon

for i=01:N-1;

    i=i+1;
    r(i)=i*h;
    for p=1

        veff1(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff1,'b')
        hold on
    end
end
```

```

for p=0
    veff2(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
    plot(r,veff2,'r')
end

end

%% Paramètre du plot 1

axis([0 rf -0.2 +0.5]) %On restreint la fenêtre

set(gca,'XTick',(0:5:rf));
grid %Affiche le quadrillage
title('Potentiel effectif en métrique relativiste pour plusieurs valeurs de epsilon')
xlabel('Rayon r')
ylabel('Potentiel effectif en métrique relativiste')
legend('Particule massive','Particule sans masse');

pause

hold off %On efface les précédents graphiques

%% Variation du paramètre L, moment angulaire :

%1) Pour une particule massive (p=1)

r=0;
p=1;

for i=0:N-1;

    i=i+1;
    r(i)=i*h;

    for L=1
        veff3(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff3,'k')
        hold on
    end

    for L=2
        veff4(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff4,'b')
    end

    for L=3
        veff5(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff5,'g')
    end

    for L=4
        veff6(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff6,'r')
    end

    for L=5
        veff7(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff7,'m')
    end

end

end

```

```

%% Paramètre du plot 2
axis([0 rf -0.5 +0.5]) %On restreint la fenêtre

set(gca,'XTick',(0:10:rf));
grid %Affiche le quadrillage
title('Potentiel effectif en métrique relativiste pour une particule massive')
xlabel('Rayon r')
ylabel('Potentiel effectif en métrique relativiste')
legend('L=1','L=2','L=3','L=4','L=5');

pause

hold off

%2) Pour une particule non-massive (p=0)

r=0;
p=0;

for i=0:N-1;

    i=i+1;
    r(i)=i*h;

    for L=1
        veff8(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff8,'k')
        hold on
    end

    for L=2
        veff9(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff9,'b')
    end

    for L=3
        veff10(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff10,'g')
    end

    for L=4
        veff11(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff11,'r')
    end

    for L=5
        veff12(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff12,'m')
    end

end

%% Paramètre du plot 2
axis([0 rf -0.1 +0.5]) %On restreint la fenêtre

set(gca,'XTick',(0:10:rf));
grid %Affiche le quadrillage
title('Potentiel effectif en métrique relativiste pour une particule non-massive')
xlabel('Rayon r')
ylabel('Potentiel effectif en métrique relativiste')
legend('L=1','L=2','L=3','L=4','L=5');

```

### 12.3.1 Graphique du potentiel effectif relativiste

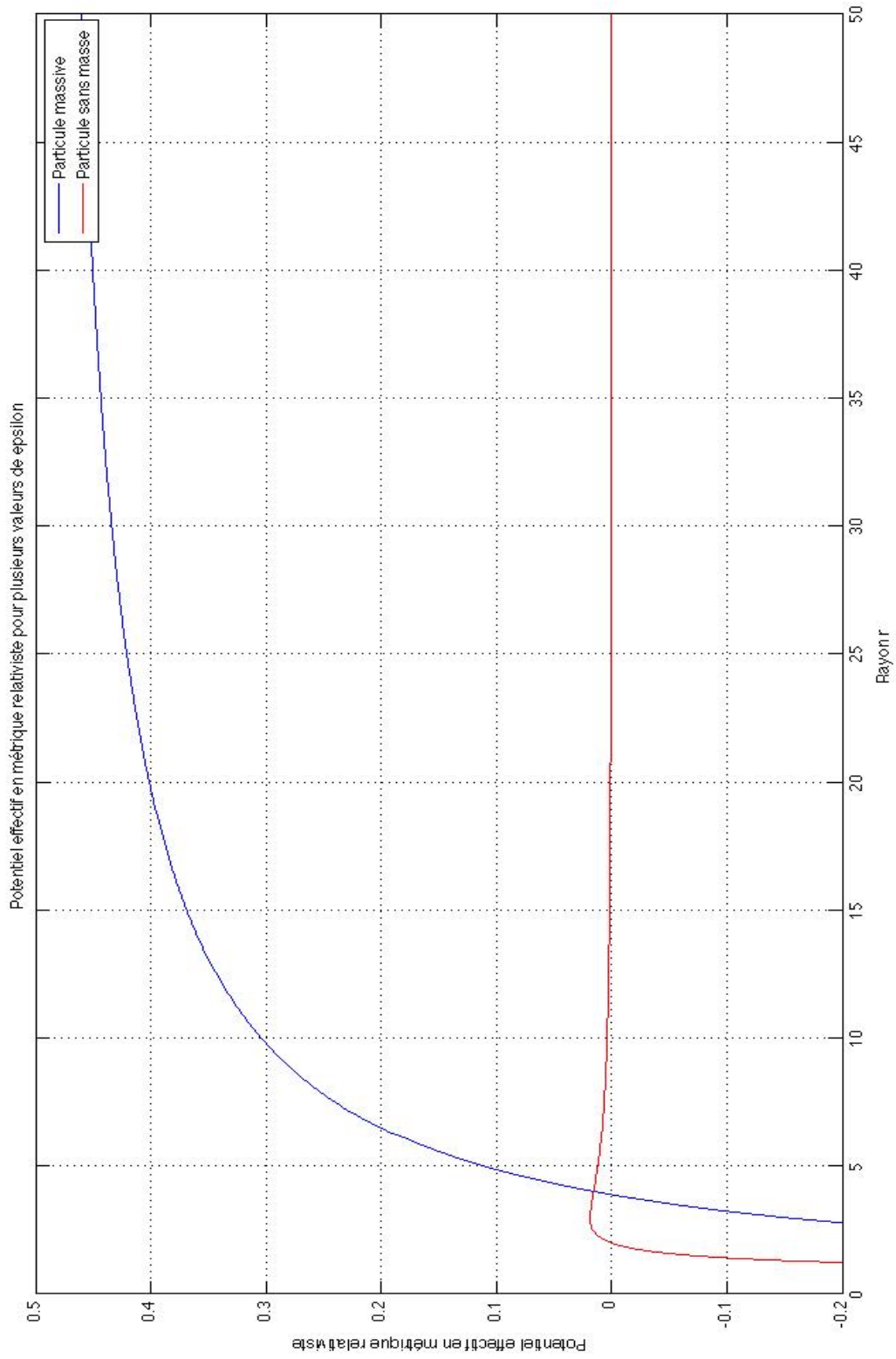


FIGURE 12.5 – Potentiel effectif en métrique relativiste pour une particule massive et non massive.

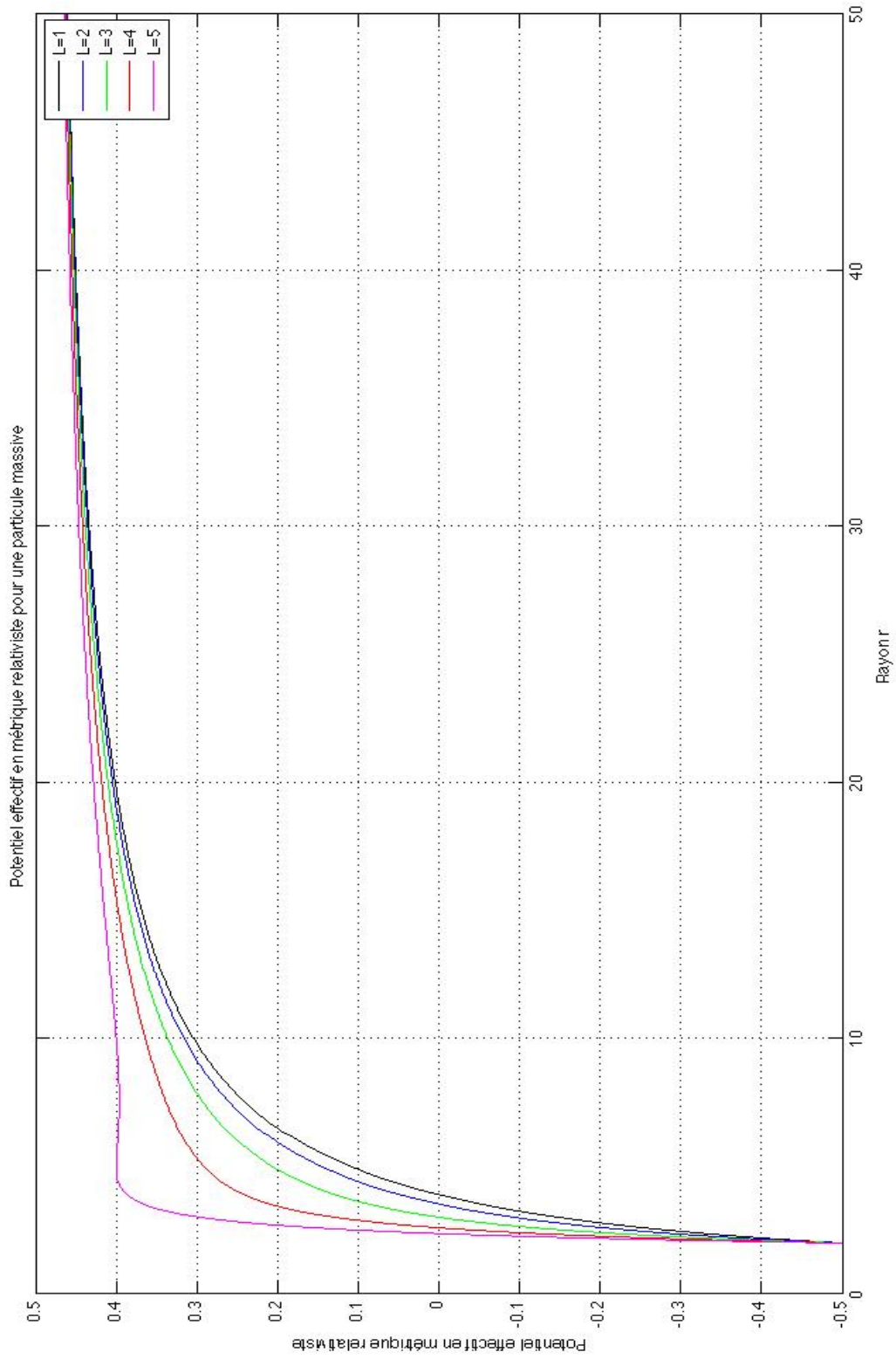


FIGURE 12.6 – Potentiel effectif en métrique relativiste pour une particule massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$



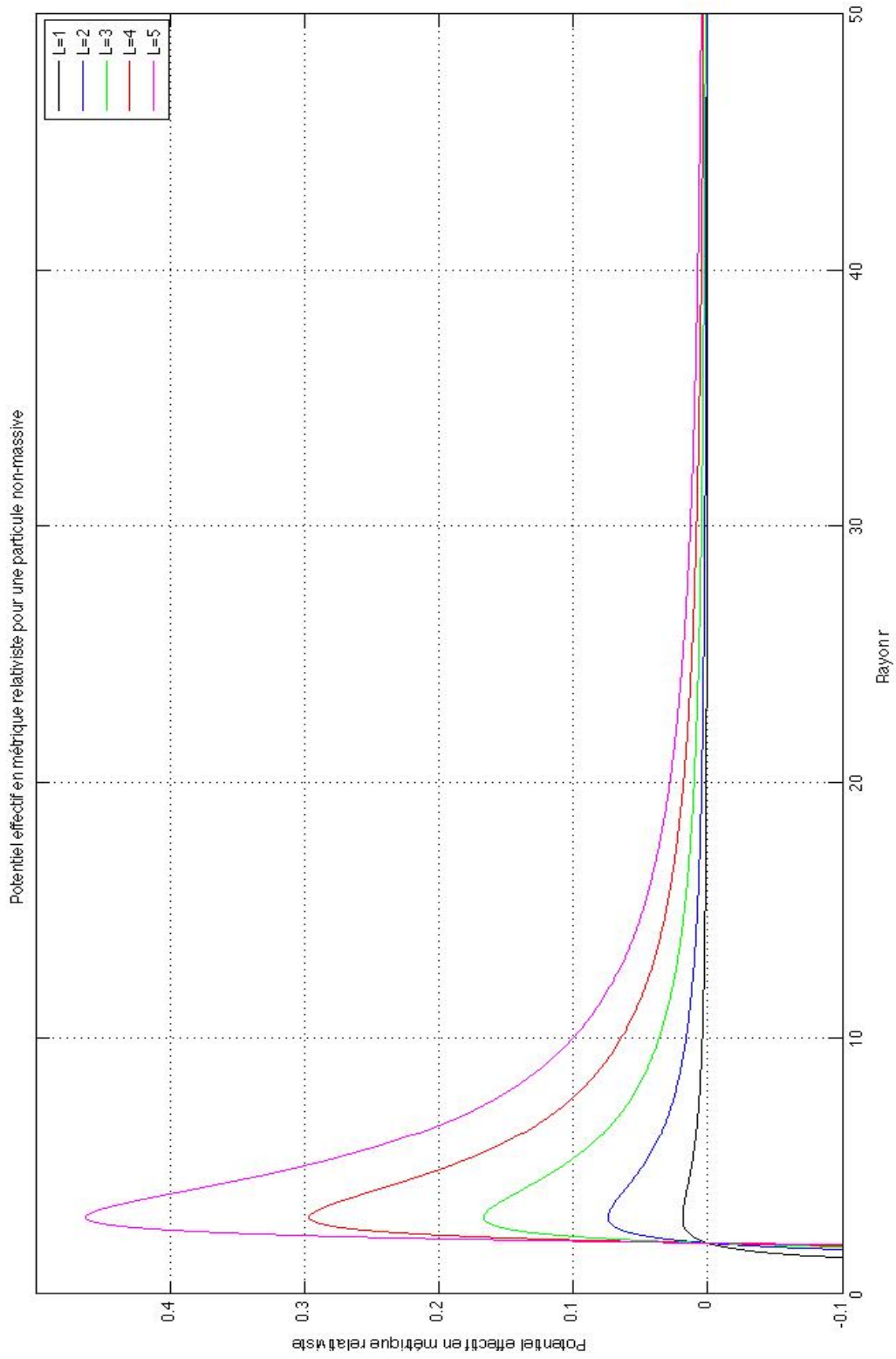


FIGURE 12.7 – Potentiel effectif en métrique relativiste pour une particule non massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$

## 12.4 Code du graphique du potentiel effectif cosmologique

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Tracé du potentiel effectif en fonction du rayon r %
% pour une métrique Schwarzschild-de Sitter %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc

%% Initialisation des constantes

c=1;
G=1;
M=1;
p=1; %Constante epsilon (p=1 : point matériel ; p=0 : lumière)
rs=2*M/c^2; %Rayon de Schwarzschild

L=4.5; % Moment angulaire (4.5)
yp=1; %Limite max. de graduation de l'ordonnée y
ym=yp; %Limite min. de graduation de l'ordonnée y

%lambda=0; %Constante cosmologique
lambda_value=7E-7; %Valeur semblable à celle de l'article (7E-7)
%lambda_value=input('Entrez la valeur de la constante cosmologique (2.5E-2) : ');

%% Paramètres de la boucle

h=0.3; %Pas (0.1 pour une bonne précision)
%h=input('Entrez la valeur du pas pour la précision du calcul : ');
rf=300; %Rayon final (300)

%2) Pour les deux derniers graphiques
rf2=50; %Rayon maximal pour les deux autres graphiques
N2=rf2/h; %Nombre de valeurs

%% Initialisation des boucles

i=0; %initialisation de l'itération i
veff1=0; %Initialisation de la fonction gtt
veff2=0;
veff3=0;
N=rf/h; %Nombre de valeurs

%% Boucle pour la variation de lambda
r=0; %Initialisation du rayon

for i=0:N-1;

    i=i+1;
    r(i)=i*h;

    for lambda=+lambda_value; %Pour lambda positif

        veff1(i)=(1/2)*(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2)*(p+L^2/r(i)^2);
        plot(r,veff1,'r')

    end

    for lambda=0; %Pour lambda nul

        veff2(i)=(1/2)*(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2)*(p+L^2/r(i)^2);
```

```

        plot(r,veff2,'k-.')
        hold on
    end

    for lambda=-lambda_value; %Pour lambda négatif

        veff3(i)=(1/2)*(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2)*(p+L^2/r(i)^2);
        plot(r,veff3,'b')
    end

end

%% Paramètre du plot

axis([-1 rf 0.4 +0.58]) %On restreint la fenêtre

set(gca,'XTick',(0:50:rf));
grid %Affiche le quadrillage
title('Potentiel effectif de la métrique de Schwarzschild-de Sitter pour plusieurs valeurs de lambda')
xlabel('Rayon r')
ylabel('Potentiel effectif de la métrique de Schwarzschild-de Sitter')
legend('Lambda=0','Lambda<0','Lambda>0');

pause

hold off

%% Variation du paramètre L, moment angulaire :

%1) Pour une particule massive (p=1)

r=0;
p=1;

for i=0:N2-1;

    i=i+1;
    r(i)=i*h;

    for L=1
        veff4(i)=(1/2)*(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2)*(p+L^2/r(i)^2);
        plot(r,veff4,'k')
        hold on
    end

    for L=2
        veff5(i)=(1/2)*(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2)*(p+L^2/r(i)^2);
        plot(r,veff5,'b')
    end

    for L=3
        veff6(i)=(1/2)*(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2)*(p+L^2/r(i)^2);
        plot(r,veff6,'g')
    end

    for L=4
        veff7(i)=(1/2)*(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2)*(p+L^2/r(i)^2);
        plot(r,veff7,'r')
    end

    for L=5
        veff8(i)=(1/2)*(1-rs/r(i)-1/3*lambda*r(i)^2)*(p+L^2/r(i)^2);
        plot(r,veff8,'m')
    end
end

```

```

end

end

%% Paramètre du plot 2

axis([0 rf2 0.3 +0.66]) %On restreint la fenêtre

set(gca,'XTick',(0:10:rf));
grid %Affiche le quadrillage
title('Potentiel effectif en métrique relativiste pour une particule massive')
xlabel('Rayon r')
ylabel('Potentiel effectif en métrique relativiste')
legend('L=1','L=2','L=3','L=4','L=5');

pause

hold off

%2) Pour une particule non-massive (p=0)

r=0;
p=0;

for i=0:N2-1;

    i=i+1;
    r(i)=i*h;

    for L=1
        veff9(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff9,'k')
        hold on
    end

    for L=2
        veff10(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff10,'b')
    end

    for L=3
        veff11(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff11,'g')
    end

    for L=4
        veff12(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff12,'r')
    end

    for L=5
        veff13(i)=(1/2)*p-p*2*G*M/r(i)+L^2/(2*r(i)^2)-G*M*L^2/(r(i)^3);
        plot(r,veff13,'m')
    end

end

%% Paramètre du plot 2

axis([0 rf2 -0.1 +0.5]) %On restreint la fenêtre

set(gca,'XTick',(0:10:rf));
grid %Affiche le quadrillage
title('Potentiel effectif en métrique relativiste pour une particule non-massive')
xlabel('Rayon r')

```

```
ylabel('Potentiel effectif en métrique relativiste')  
legend('L=1','L=2','L=3','L=4','L=5');
```

### 12.4.1 Graphique du potentiel effectif cosmologique

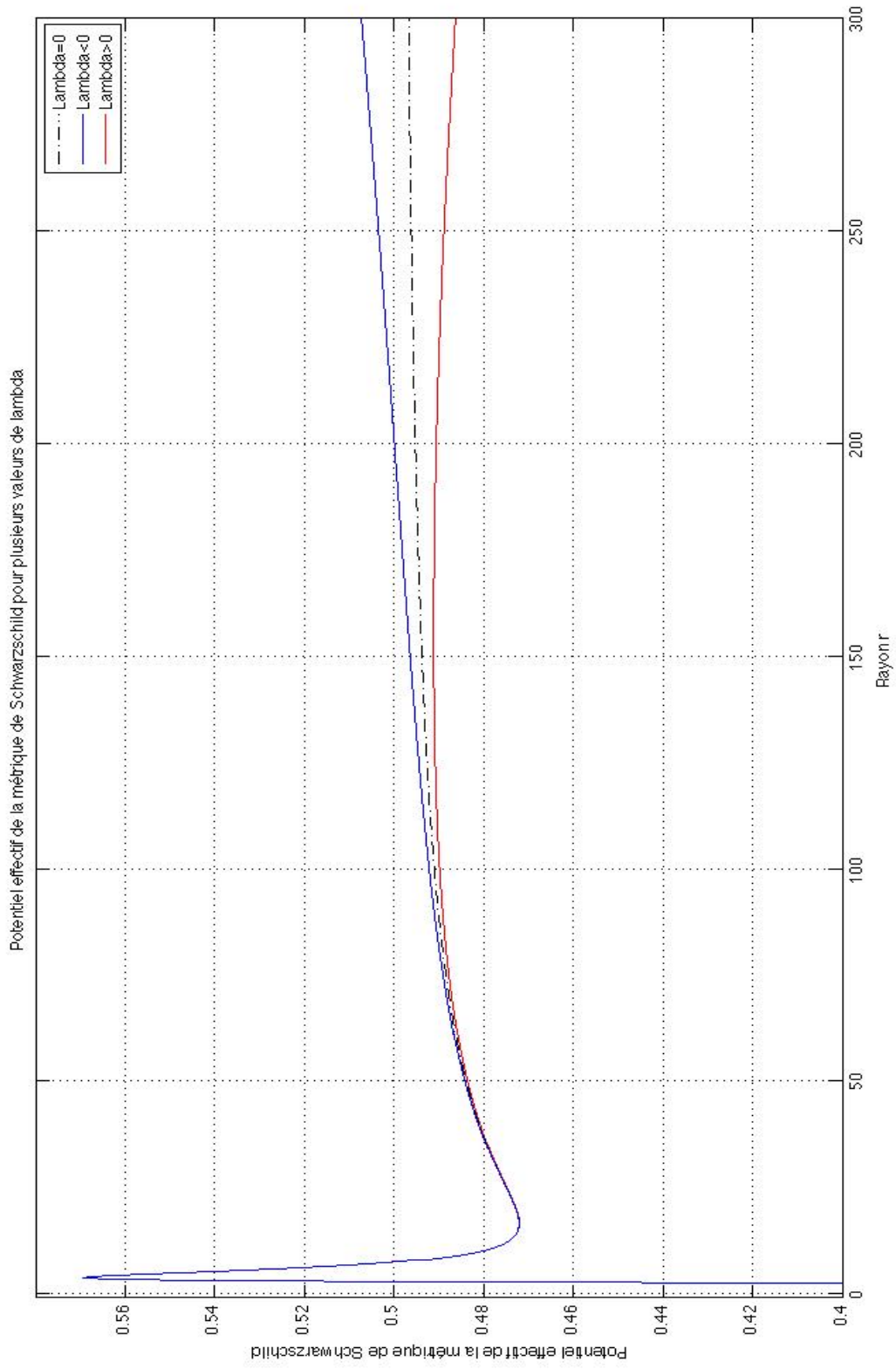


FIGURE 12.8 – Potentiel effectif en métrique de Schwarzschild pour une particule massive et non massive.

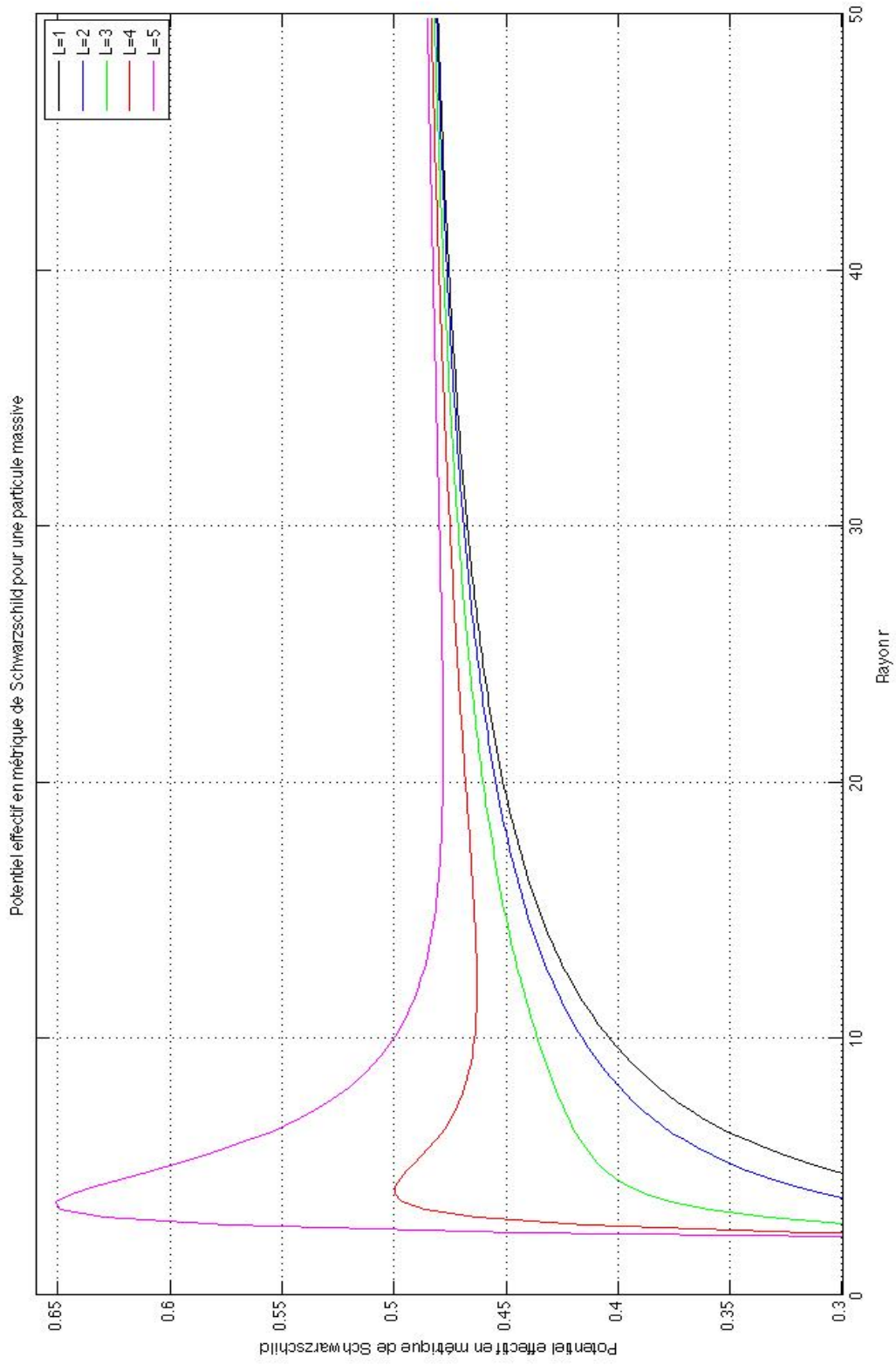


FIGURE 12.9 – Potentiel effectif en métrique de Schwarzschild pour une particule massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$

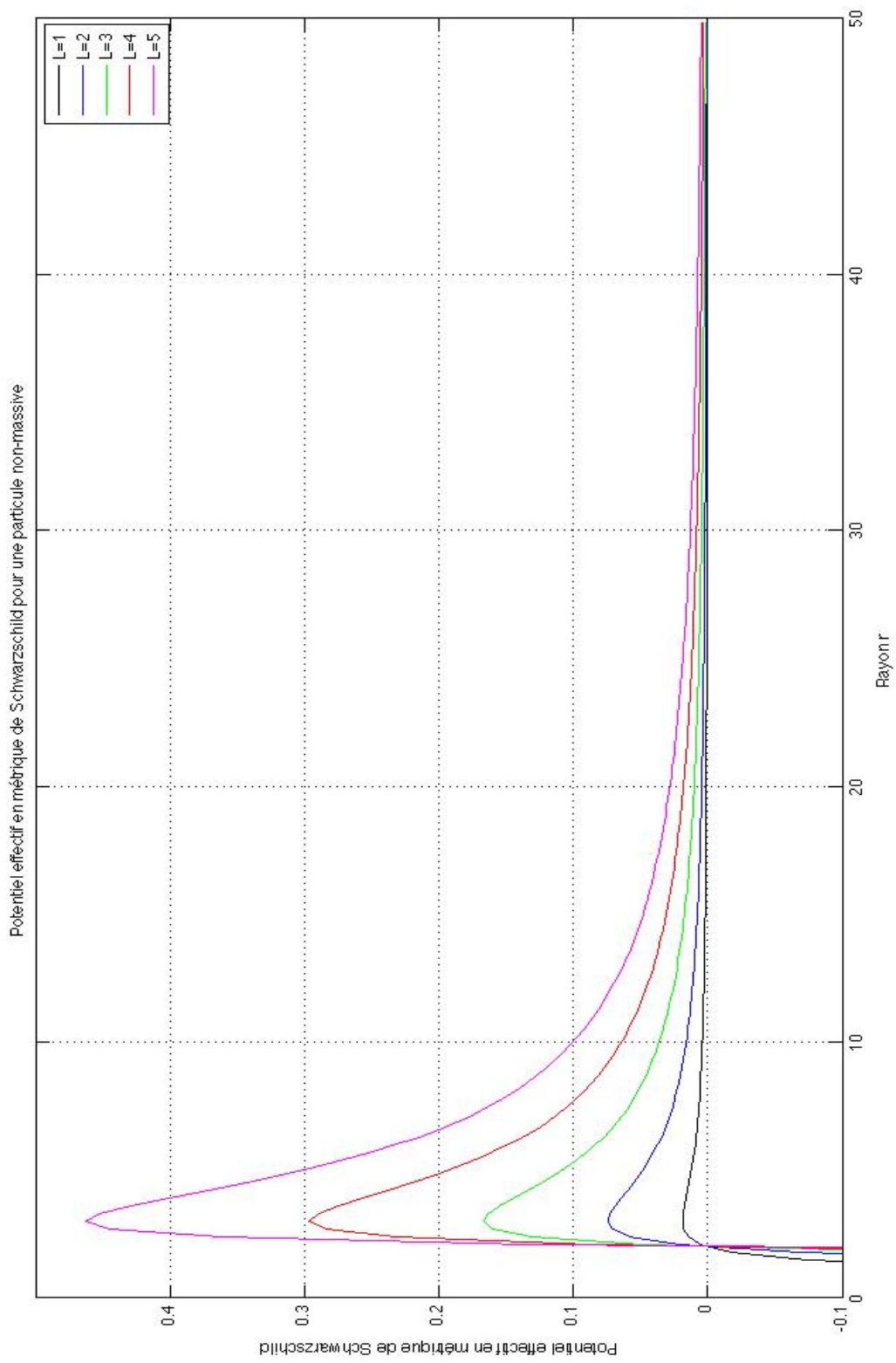


FIGURE 12.10 – Potentiel effectif en métrique de Schwarzschild pour une particule non massive suivant différentes valeurs du paramètre  $L$



## 12.5 Programme $(\mu, \lambda)$ du nombre de racines du polynôme $P_5(u)$

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% TRACE DU NOMBRE DE RACINES DE P5(u) %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc

%% Paramètre de précision du calcul (lent à partir de 0.01)

h=0.005 ; % Pas de l'itération

uf=2.5;

cm=flipud(gray(5));

N=uf/h;

epsilon=0 % Pour une particule massive

Lambda=[-10^(-5) -10^(-10) -10^(-45) 0 +10^(-45) +10^(-10) +10^(-5)];

rs=1;

for m=1:7

% Paramètre d'incrémentatation

rho=1/3*Lambda(m)*rs % Rho fixé pour chaque graphique
mu=0;
b=0;

for i=1:N

lambda(i)=i*h; % On balaye les valeurs de lambda

for j=1:N

mu(j)=j*h; % On balaye les valeurs de mu

P =[+1 -1 +lambda(i) (lambda(i).*(mu(j)-1)+rho) 0 lambda(i).*rho];

racines=roots(P); % On cherche les racines du polynôme

somme=0;

for k=1:5 %Nombre de racines réelles positives

if (imag(racines(k))==0 && racines(k)>0)

somme=somme+1; % Incrémente 1 pour chaque racines R>0

end

end

end

b(i,j)=somme; % Compte le nombre de racines du polynôme

end

end
end

```

```

%% Partie graphique

if Lambda(m)==0

subplot(3,3,5)
image(mu,lambda,b+1) % Trace le graphique
colormap(cm); % Donne le code couleur de l'image
set(gca,'YDir','normal') % Renverse l'axe des ordonnées

elseif Lambda(m)<0
    subplot(3,3,m)
    image(mu,lambda,b+1) % Trace le graphique
    colormap(cm); % Donne le code couleur de l'image
    set(gca,'YDir','normal') % Renverse l'axe des ordonnées

elseif Lambda(m)>0
    subplot(3,3,m+2)
    image(mu,lambda,b+1) % Trace le graphique
    colormap(cm); % Donne le code couleur de l'image
    set(gca,'YDir','normal') % Renverse l'axe des ordonnées
end
%% Paramètres du graphique
axis([0 2.5 0 0.5]) %On restreint la fenêtre

title([num2str(Lambda(m),'%g') ' km^2'])
xlabel('Paramètre mu')
ylabel('Paramètre lambda')

end

```

## 12.6 Graphique $(\mu, \lambda)$ du nombre de racines du polynôme $P_5(u)$ pour une particule avec ou sans masse

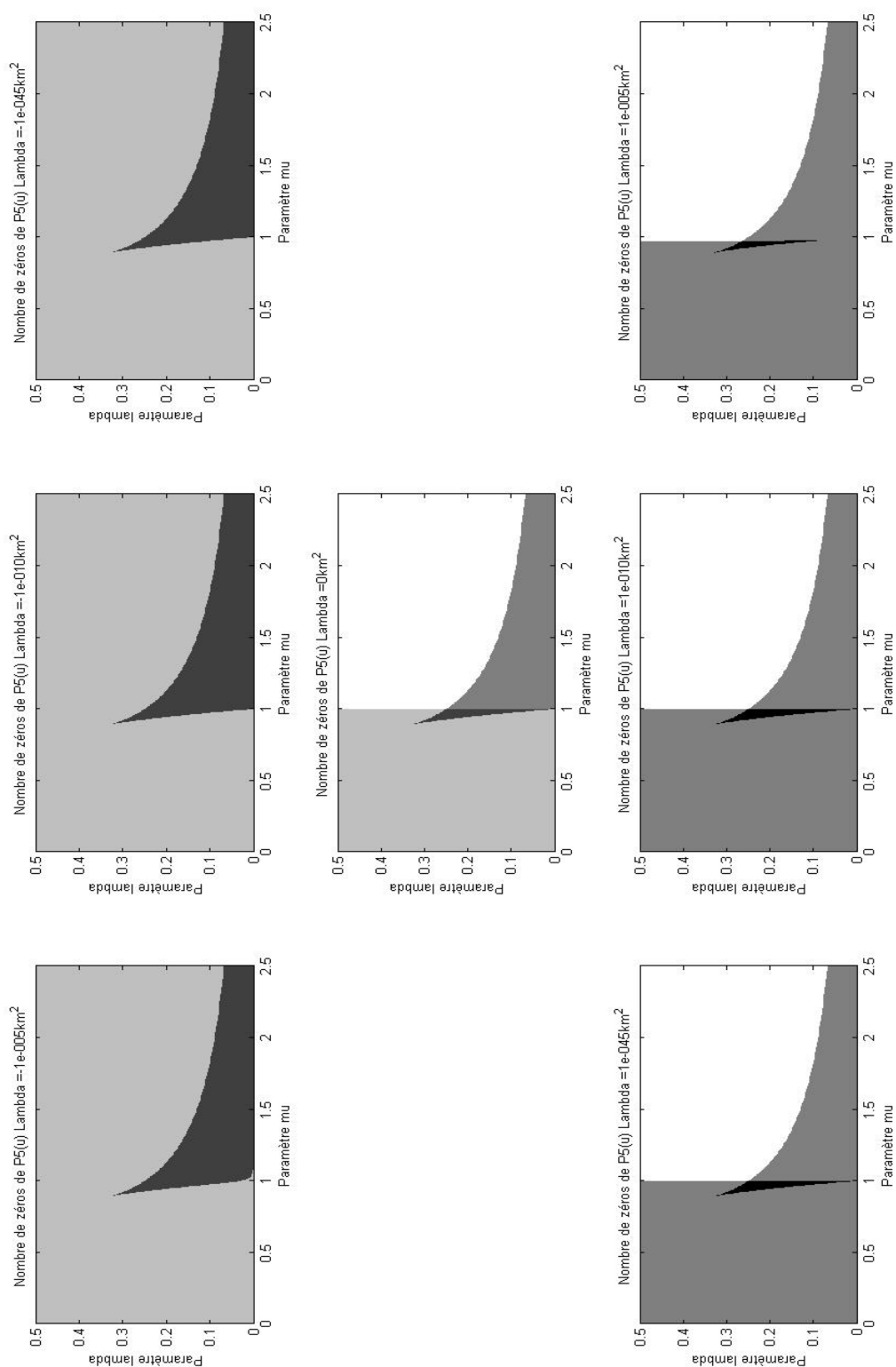


FIGURE 12.11 – Nombre de racines réelles positives (Blanc : 0 Gris foncé : 3 Noir : 4) en fonction des paramètres  $\mu$  et  $\lambda$  pour une valeur de la constante cosmologique  $\Lambda$  donnée pour une particule massive (i.e.  $\epsilon = 1$ )

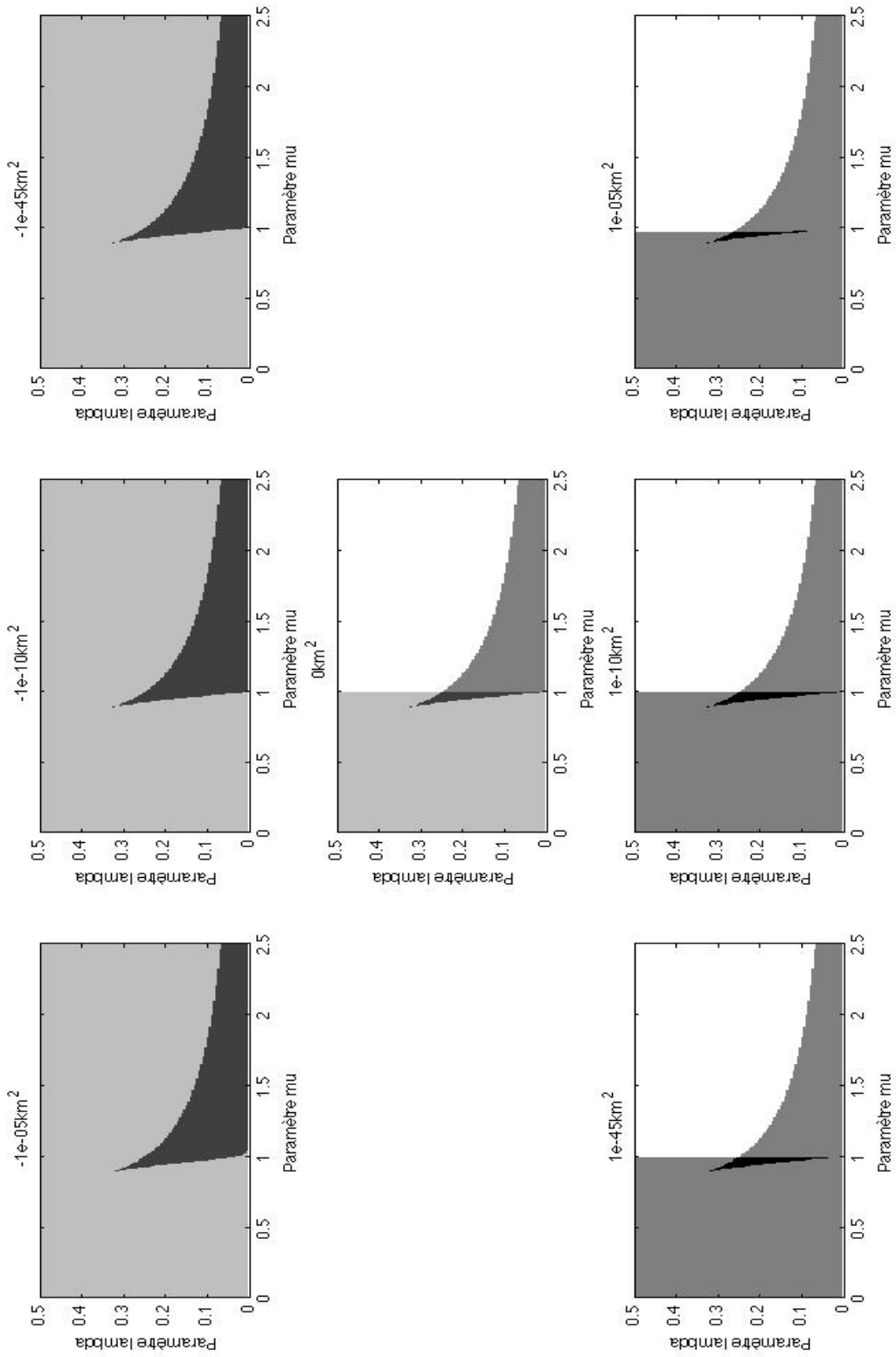


FIGURE 12.12 – Nombre de racines réelles positives (Blanc : 0 Gris clair : 1 Gris foncé : 2 Noir : 3 Noir : 4) en fonction des paramètres  $\mu$  et  $\lambda$  pour une valeur de la constante cosmologique  $\Lambda$  donnée pour une particule massive (i.e.  $\epsilon = 0$ )

## 12.7 Programme plots of orbits

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%
%   Trajectoire de particules dans un espace-temps de Schwarzschild %
%
%                               by Alexandre Fauré (Mai 2010)           %
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% On réinitialise l'environnement

clear all
close all
clc
warning('off') % Pour stopper l'affichage des erreurs

global E2 epsilon Lambda L

%% On définit le format de précision des résultats

format long

%% Constantes fondamentales

G=1;
c=1;
M=1;

%% Valeur des constantes du programme

% Choix d'epsilon par l'utilisateur

epsilon=input('Choix d\'une particule massive (1) ou sans masse (0) ? : ');
if epsilon==1
    disp('Vous avez choisi le cas d\'une particule massive. ');
else
    disp('Vous avez le choisi le cas d\'un rayon lumineux. ');
end

%% Constante cosmologique Lambda

Lambda1=input('Facteur de la constante cosmologique facteur^10^(puissance) : ');

if Lambda1==0
    disp('Constante cosmologique nulle. ');
    Lambda=0;
elseif Lambda1>0
    Lambdapower=input('Valeur de la puissance de la constante cosmologique : ');
    Lambda=Lambda1*10^(Lambdapower)
    disp('Constante cosmologique positive. ');
else
    Lambdapower=input('Valeur de la puissance de la constante cosmologique : ');
    Lambda=Lambda1*10^(Lambdapower)
    disp('Constante cosmologique négative. ');
end

%% Paramètres E et L

E2=input('\n Entrez la valeur de E^2 : ');
L=input('\n Entrez la valeur du moment angulaire L : ');
```

```

%% Résolution de l'équation différentielle

%% Polynôme

P =[+2 -1 +2*epsilon*L (L*(E2-epsilon)+Lambda) 0 epsilon*L*Lambda];

z1=roots(P); % On cherche les racines du polynôme

z2=find(z1>0);
for l=1:length(z2) % 1) On regarde les zéros positifs
    z3(l)=z1(z2(l));
end

z4=find(imag(z3)==0); % 2) On regarde les zéros positifs, réels

if isempty(z4)==1 % On regarde le cas où il n'y a pas de zéros

    disp('Ce polynôme n'a pas de zéros réels positifs.') % Affiche le nombre de zéros
    z6=0;
else % Autres cas où il existe des zéros
    for m=1:length(z4)
        z5(m)=z3(z4(m));
    end
    z6=sort(z5); % On tri par ordre croissant les racines

    disp('Nombre de zéros du polynôme :') % Affiche le nombre de zéros
    disp(length(z6))

    disp('Zéros du polynôme : ') % On affiche les valeurs des racines
    disp(z6)
end

%% Paramètre initial y0

if z6==0 % Cas où il n'y a pas de réels positifs

    y0=input('\n Entrez la valeur de la racine : ');
    disp('Echappement de la particule hors de l''horizon. ')

else

q2=input('\n Choisissez-vous une racine (y) ou un intervalle (n) ? ','s');

if q2=='y' % Choix d'une racine

numracine=input('\n Entrer le numéro de la racine que vous utiliser : ');

if numracine==1
    y0=z6(numracine);

    if length(z6)==1
        disp('Terminating bound. ')
    elseif length(z6)==2
        disp('Flyby orbit. ')
    elseif length(z6)==3

```

```

        disp('Bound orbit. ')

        elseif length(z6)==4
            disp('Flyby orbit. ')
        end

elseif numracine==2
    y0=z6(numracine);

    if length(z6)==2
        disp('Terminating bound. ')
    elseif length(z6)==3
        disp('Terminating bound. ')

    elseif length(z6)==4
        disp('Bound orbit. ')
    end

elseif numracine==3
    y0=z6(numracine);

    if length(z6)==3
        disp('Terminating bound. ')

    elseif length(z6)==4
        disp('Bound orbit. ')
    end

elseif numracine==4
    y0=z6(numracine);
    disp('Terminating bound. ')

else
    disp('Vous n''avez pas rentré un chiffre valide. Arrêt du programme')
    return % Arrête le programme
end

elseif q2=='n' % Choix d'une valeur dans l'intervalle
y0=input('\n Entrez la valeur de la racine : ');

    % Détermination du type de région et détail pour chaque type

if length(z6)==0
    disp('Echappement de la particule hors de l''horizon. ')

elseif length(z6)==1

    if y0>z6(1)
        disp('Terminating bound. ')
    else
        disp('Vous n''êtes pas placé dans la bonne intervalle ! ')
    end

elseif length(z6)==2

```

```

    if y0<=z6(1)
        disp('Flyby orbit. ')
    elseif y0>=z6(2)
        disp('Terminating bound. ')
    else
        disp('Vous n''êtes pas placé dans la bonne intervalle ! ')
    end

elseif length(z6)==3

    if y0>z6(1) && y0<z6(2)
        disp('Bound orbit. ')
    elseif y0>z6(3)
        disp('Terminating bound. ')
    else
        disp('Vous n''êtes pas placé dans la bonne intervalle ! ')
    end

elseif length(z6)==4

    if y0<=z6(1)
        disp('Flyby orbit. ')
    elseif z6(2)<=y0 && y0<=z6(3)
        disp('Bound orbit. ')
    elseif y0>=z6(4)
        disp('Terminating bound orbit. ')
    else
        disp('Vous n''êtes pas placé dans la bonne intervalle ! ')
    end

end

else
    disp('Entrée non valide. Arrêt du programme.')
    return

end

end

%% Equation différentielle

barre = waitbar(0,'Calcul en cours ...'); % Barre d'attente

nt=2; % Nombre de tours
t=[0 nt*pi];
CI=[y0];
[PHI,U]=ode45('diff5',t,CI); %Ode45 si Lambda grande sinon ode113
R=M*U.^(-1);

waitbar(1)
close(barre) % On ferme la barre de progression

%% Graphique de la trajectoire

polar(PHI,R,'r') % On trace la trajectoire de l'objet

%% Rayon de Scharzschild ou horizon

```



```
phi=linspace(0,2*pi,1000);
% for i=1:length(phi)
%     rs(i)=2*G*M/c^2;
% end
rs2=ones(1,1000)*2*G*M/c^2;
%rs2=rs';
hold on
polar(phi,rs2,'b--') % On trace le rayon de Schwarzschild
```

```
%% Paramètre du graphique
```

```
legend(num2str(y0,'%g'),'Horizon')
axis auto
```

## Chapitre 13

# Programmation Maple

```
restart; with(plots);
with(linalg);
Digits := 50;
GM := 1.000005665*0.1720209895e-1;
G := 6.6742867*10^(-11);
c := 299792458;
M := evalf(GM/G);
epsilon := 1;
L := (1/4*2.85557237382)*10^(-9);
E2 := 1.00000000143;
rs := evalf(2*GM/c^2);
'Lambda;b' := -(1/3)*10^(-45);
Lambda := evalf((1/3)*'&Lambda;b'*GM/G);
conditioninitiale := u1(0) = evalf(1.2348*10^(-13));

equation1 := diff(u1('&varphi;'), '&varphi;') = (rs*u1('&varphi;')^3/M-u1('&varphi;')^2
+rs*epsilon*L*u1('&varphi;')/M+L*(E2-epsilon)+Lambda+epsilon*L*Lambda/u1('&varphi;')^2)^(1/2);
solution1 := dsolve({equation1, conditioninitiale}, u1('&varphi;'), type = numeric, maxfun = 500000);

Lambda2 := 0;
conditioninitiale2 := u2(0) = evalf(1.2348*10^(-13));
equation2 := diff(u2('&varphi;'), '&varphi;') = (rs*u2('&varphi;')^3/M-u2('&varphi;')^2
+rs*epsilon*L*u2('&varphi;')/M+L*(E2-epsilon)+Lambda2+epsilon*L*Lambda2/u2('&varphi;')^2)^(1/2);
solution2 := dsolve({equation2, conditioninitiale2}, u2('&varphi;'), type = numeric, maxfun = 500000);

odeplot(solution2, .4*Pi .. .6*Pi);

solution3 := solution2-solution1;

pas := 0.1e-1;
ind := 0;
xf := (.6*Pi-.4*Pi)/pas+1;
evalf(xf);
nb := floor(evalf(xf));
F := array(sparse, 1 .. nb, 1 .. 1);
P := array(sparse, 1 .. nb, 1 .. 1);

for '&varphi;' from evalf(.4*Pi) by pas to evalf(.6*Pi) do
ind := ind+1;
w := evalf(solution3('&varphi;')[2]);
wrhs := rhs(w);
F[ind, 1] := wrhs;
P[ind, 1] := '&varphi;';
end do;
solur := evalm[50](F*M);
```

## 13.1 Résultats obtenus avec le programme Maple

### 13.1.1 Pour la sonde Pioneer 10

```
0.000015365759882121436037516440889266293738262150351858
0.000014893090931445366903469501920867864532300058305550
0.000014418483038636889465877188904741965778916636139180
0.000013942807561850981886600943647491542274362319134603
0.000013466771389988376862850882341464094079790919615851
0.00001299036507282106242983225898443311776076988248423
0.000012510996938663923169177916944488613406856658057585
0.000012034718770724961632015868616530741965168581568342
0.000011570528158828483945946171461291183891334996351815
0.000011062387855206424494106445033400773365689370657660
0.000010536521006623667763084057171613100479724834196799
0.000010017579992746646323516437268161118343020631405421
0.0000095240506386408234087517873258796344476757207040806
0.0000090682522147706929148490819582053106683087743688355
0.0000086563374369997794005780683891766632620581784358783
0.0000082882924665906380874192664534340628685820327762828
0.0000078778540965445089863846999633726456604169669579645
0.0000073704935378203877000055739006592181341337205258602
0.0000068634170011747341613979700692084058951806041623067
0.0000063630778316143357118200307655641349089702769112215
0.0000058608409332063571772722967755167327239282320152315
0.0000055508984016226628772475802814245823329919067093839
0.0000044108937298218641056660190152401121587872610026661
0.0000033096589768961471171019292221752210774840367371529
0.0000032561969196697012254978575907672259702341562552904
0.0000044794230571900125284765541467037581039535709150653
0.0000059342595554940462714345037945135568668267598622283
0.0000049863019920855476493219922987139790631499073880937
0.0000039866193131894051819464271858170386799899554766875
0.0000029394011140469595518330073543395225848282597712608
0.0000015019607920902707213266847342337260168517173810476
0.00000046437163308057034583141372657744335719388298632979
0.0
0.0
0.0
0.0
```

(13.1)

### 13.1.2 Pour la sonde Pioneer 11

```
0.000011398439512814819715029322966377914505376887500292
0.000011093838115206012220384289274131231157995899291655
0.000010782435387668166881619486083592449454111708199295
0.000010427961854193774318715406416815335076834126905092
0.000010070284508821128361585215154884866191053174204411
0.0000097115871525274911909549308487250512685039291024156
0.0000093529790915573939707896504518061041321194176060841
0.0000089953101579470792540703397650172347025726329848304
0.000008637562041355539264769929266493530656553779374549
0.0000082761798359749948034035393012017200170972870165529
0.0000079267768881695557074896913839050622148335096766529
0.0000076315213828609147777432493891751264778635368340294
0.0000071759586473666152814071458310152235984028387431505
0.0000066464136086866883586480037305213403757531202891955
0.0000061409920339710122167249427434727605272258292026401
0.0000057311541688412758715852605230388458405764799356511
0.0000054617147373909791478644327197790361740046537497177
0.0000053508429421854326788861129816428494561539986280207
0.0000053900624642617579066621329539698816861122293295572
0.0000055426400772227570052918087972573355977669145752735
0.0000053907334350205495445198010962281701546344124129578
0.0000049076850981044630009293892991839430139985541234261
0.0000044328595523838034491962126782381936681324314270890
0.0000039975045303663553841389459173744959814444794674781
0.0000035434938600706371274342216734113001275617179832067
0.0000030727605478641784263393089577305022418244363533278
0.0000025924226745268914586706527063490981737127644628842
0.0000020847446499299047571785546886092768788624021356968
0.0000017482453968232424545358752706781417514825183483778
0.0000012864949066171188623251299397185088558483829740802
0.00000060979623997979677085657839713692091298294728858948
0.00000020330371949231323918770180958470201599206666037751
0.0
0.0
0.0
0.0
```

(13.2)

# Bibliographie

- [1] E.Hackmann, C. Lämmerzahl *Geodesic equation in Schwarzschild-(anti-)de Sitter space-times : Analytical solutions and applications*, Physical Review D 78, 024035 (2008).
- [2] NASA *Missions - Pioneer 10 and 11*, <http://science.nasa.gov/missions/pioneer-10-11> nasa.gov.
- [3] Slava G. Turyshev and Viktor T. Toth and Larry R. Kellogg and Eunice. L. Lau and Kyong J. Lee *The Study of the Pioneer Anomaly : New Data and Objectives for New Investigation*, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0512121v2>
- [4] John D. Anderson and Michael Martin Nieto and Slava G. Turyshev *A Mission to Test the Pioneer Anomaly*, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0205059v3> Int.J.Mod.Phys. D11 (2002) 1545-1552 (2002)
- [5] Slava G. Turyshev and John D. Anderson and Philip A. Laing and Eunice L. Lau and Anthony S. Liu and Michael Martin Nieto *The Apparent Anomalous, Weak, Long-Range Acceleration of Pioneer 10 and 11*, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9903024v2> "Gravitational Waves and Experimental Gravity", (2000) 481-486
- [6] Viktor T Toth and Slava G Turyshev *The Pioneer Anomaly : Seeking an explanation in newly recovered data*, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0603016v2> Can.J.Phys.84 :1063-1087 (2006)
- [7] Malcolm Ludvigsen *La relativité générale - Une approche géométrique*, Dunod ISBN : 2100496883 (2000)
- [8] Ruth Durrer *Cours de physique théorique pour la troisième et quatrième année*, Département de physique théorique - Université de Genève (2002)
- [10] Gradshteyn and Ryzhik *Table of Integrals, Series, and Products*, Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger (eds.) - ISBN number : 0-12-373637-4 - (2007)
- [11] Bernard Linet *Notes de cours de Relativité Générale*, Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique - Université François Rabelais (2004-2005)
- [12] Wolfgang Rindler and Mustapha Ishak *Contribution of the cosmological constant to the relativistic bending of light revisited*, Physical Review D 76, 043006 (2007)
- [13] Eva Hackmann *Geodesic equations in black hole space-times with cosmological constant*, Universität Bremen - (2010)
- [14] Site internet Sciences.ch *Eléments de Mathématiques Appliquées*, <http://www.sciences.ch/htmlfr/accueil.php>
- [15] Hervé Kunz *Relativité Générale*, Institut de Théories des Phénomènes Physiques - Faculté des Sciences de Base, Lausanne - (2007)

- [16] Karl Schwarzschild *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzber. Deut. Akad. Wiss. - (1916)
- [17] Wikimedia Foundation, Inc. *Encyclopédie en ligne Wikipédia*, <http://fr.wikipedia.org/>
- [18] Milton Abramowitz and Irene A. Segun *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc. New York - SBN : 486612724 (1964)